

Università degli Studi di Catania
Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica Magistrale LM-40

Tesi di Laurea

L'insegnamento e l'apprendimento della probabilità nella scuola secondaria di secondo grado: analisi delle misconcezioni e approccio laboratoriale

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa Maria Flavia MAMMANA

Laureando: Domenico ZITELLI

Anno Accademico 2025/2026

Non per me,

ma per i miei ragazzi.

Indice

Introduzione **v**

1 Stato dell'arte **1**

1.1 Misconcezioni ed errori frequenti 2

1.1.1 Misconcezioni in Matematica 2

1.2 Etniadi: quesiti comunemente sbagliati 4

1.2.1 Edizioni del 2023, 2024 e 2025 5

1.3 Dall'idea alla sperimentazione 11

1.3.1 Perché la Probabilità? 12

1.3.2 Struttura della sperimentazione 13

1.4 Domanda di ricerca 14

2 Teoria **15**

2.1 Calcolo combinatorio 15

2.1.1 Introduzione al pensiero combinatorio 16

2.1.2 Permutazioni 17

2.1.3 Disposizioni 19

2.1.4 Combinazioni 21

2.1.5 Il coefficiente binomiale 23

2.2 Probabilità 25

2.2.1 Introduzione alla Probabilità classica 26

2.2.2 Operazioni tra eventi e proprietà 30

2.2.3 Probabilità condizionata e indipendenza 33

2.2.4 Probabilità totale 37

3 Quadro teorico **39**

3.1 La prospettiva di Vygotskij 39

3.1.1 Il primo elemento della teoria vygotskijana : il clima positivo 40

3.1.2 Il secondo elemento della teoria vygotskijana: l'apprendimento socializzato nell'area di sviluppo prossimale 42

3.1.3 Terzo elemento della teoria vygotskijana: lo sviluppo della metacognizione 44

3.1.4 Quarto elemento della teoria vygotskijana: lo svilup- po delle competenze individuali 45

3.2 Laboratorio di Matematica 46

3.2.1 Gli strumenti del Laboratorio di Matematica 47

3.2.2 Indicazioni metodologiche 49

3.3 Misconcezioni: dal conflitto alla conoscenza 50

3.3.1 La discussione collettiva come strumento di emersione dell'errore 51

4 Intervento didattico **52**

4.1 Obiettivi disciplinari e conoscenze 52

4.1.1 Obiettivi trasversali e di educazione civica 53

4.2 Struttura dell'attività sperimentale 54

4.2.1 Primo incontro 54

4.2.2 Secondo incontro 58

4.2.3 Terzo incontro 59

4.3 Schede didattiche 63

5 Analisi della sperimentazione **84**

5.1 Contesto della classe coinvolta 84

5.2 Analisi dell'attività didattica 85

5.2.1 Primo incontro 86

5.2.2 Secondo incontro 92
5.2.3 Terzo incontro 106
5.3 Risultati del questionario 111

6 Conclusioni **117**

Ringraziamenti **120**

Bibliografia **122**

Introduzione

Il presente lavoro di tesi trae la sua origine dall'esperienza maturata durante il supporto dato al comitato organizzatore dell'Etniade nell'edizione del 2024. In fase di correzione degli elaborati, l'analisi delle risposte fornite dai partecipanti ha fatto emergere la ricorrenza di strategie risolutive errate comuni a un numero significativo di studenti. L'aspetto più rilevante di tale fenomeno non risiede nell'errore in sé, quanto nella sua natura sistematica: studenti provenienti da contesti scolastici e percorsi formativi differenti hanno manifestato le medesime difficoltà logiche e procedurali di fronte ai medesimi quesiti.

Questa osservazione ha stimolato un'indagine approfondita sulle radici di tali fallimenti conoscitivi, conducendo l'analisi verso il concetto pedagogico di *misconcezione*. Lo studio teorico delle fonti, unito all'analisi dei dati storici raccolti nelle precedenti edizioni delle Etniadi, ha permesso di delineare un quadro delle difficoltà più frequenti, con particolare riferimento all'ambito del calcolo delle probabilità.

Sulla base di queste premesse, è stata avviata una sperimentazione didattica presso il Liceo Scientifico "Boggio Lera", finalizzata a mappare le misconcezioni presenti nel contesto classe e a testare un intervento mirato. La ricerca si è articolata attraverso la somministrazione di un *pre-test*, volto a far emergere le convinzioni ingenue degli studenti, seguito da un intervento basato sulla metodologia del Laboratorio di Matematica.

L'idea centrale del progetto è stata quella di superare i limiti della lezione frontale tradizionale per abbracciare una didattica laboratoriale che promuovesse il *collaborative learning* e l'inclusione. Attraverso l'uso di artefatti fisici, la risoluzione di

problemi reali legati anche all'Educazione civica e l'ausilio di strumenti computazionali come il software *Python*, l'attività ha mirato a trasformare lo studente da spettatore passivo a costruttore attivo del proprio sapere.

Nelle pagine che seguono, verranno analizzati i presupposti teorici della didattica della Matematica, la descrizione dettagliata della sperimentazione condotta e l'analisi quantitativa e qualitativa dei dati raccolti, al fine di valutare l'efficacia del laboratorio nel processo di superamento delle misconcezioni.

Capitolo 1

Stato dell'arte

L'interesse per l'indagine oggetto di questo lavoro di tesi è maturato nell'ambito del supporto dato al comitato organizzatore delle Etniadi, le gare matematiche rivolte agli studenti dei bienni delle scuole secondarie di secondo grado, tenute presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Catania.

La parte dell'attività di supporto focalizzata principalmente sulla revisione e sulla valutazione degli elaborati dei partecipanti, ha permesso di riscontrare la ricorrenza di errori sistematici e trasversali nelle risoluzioni dei quesiti. Tali evidenze non sono apparse come semplici sviste di calcolo, bensì come manifestazioni di ostacoli cognitivi e "misconcezioni" radicalizzate, derivanti da interpretazioni errate di concetti matematici fondamentali.

La curiosità scientifica generata dall'osservazione di queste fragilità ha fornito l'impulso per avviare uno studio sperimentale mirato. L'obiettivo è stato quello di approfondire, attraverso una sperimentazione, la natura di tali errori, analizzandone le cause sottostanti per tentare di delineare percorsi didattici più efficaci. Il presente lavoro di tesi costituisce la sistematizzazione e lo sviluppo di tale indagine.

1.1 Misconcezioni ed errori frequenti

Il termine "misconcetto" o "misconcezione" nasce come traduzione dell'inglese *misconception* e viene generalmente interpretato nel panorama didattico come "giudizio erroneo", "idea fallace" o, in un'accezione più ampia, come un "equivoco" cognitivo. Come suggerito dal prefisso *mis-*, che attribuisce una connotazione negativa al sostantivo che segue, il termine è intrinsecamente legato alla didattica dell'errore, indicando una comprensione distorta o incompleta di un concetto.

La letteratura scientifica concorda nel rintracciare le origini di questo costrutto nei domini della Fisica e dell'Economia. In tali ambiti, alcune misconcezioni sono state interpretate come veri e propri "stereotipi" cognitivi (Gardner, 1991). In tal senso, Schoenfeld (1985) ha evidenziato come il contesto di presentazione di un quesito possa influenzare drasticamente le risposte degli studenti, inducendo fraintendimenti sistematici; tali studi, divenuti ormai dei classici, traggono ispirazione proprio da ricerche pionieristiche condotte in ambito fisico (McCloskey, 1983).

1.1.1 Misconcezioni in Matematica

L'introduzione formale del termine *misconception* nel dominio della ricerca in Didattica della Matematica risale ai primi anni Ottanta. Tra le apparizioni documentate più significative si annoverano il lavoro di Wagner (1981) sull'apprendimento di equazioni e funzioni e il celebre contributo di Kieran (1981) focalizzato sui processi di risoluzione algebrica. Successivamente, il dibattito si è esteso con le ricerche di Clement (1982) e ulteriori approfondimenti di Wagner (1983) e Kieran (1983), consolidando l'analisi delle misconcezioni nell'area dell'algebra.

A partire dalla metà degli anni Ottanta, il termine compare in modo esplicito e sistematico in numerosi lavori, tra cui quelli di Schoenfeld (1985), Shaughnessy (1985) e Silver (1985). In questi contributi, la misconcezione viene indagata in stretta relazione con il problem solving e con il sistema di convinzioni dello studente. Nello specifico, Silver (1985) sottolinea la profonda interdipendenza tra

misconcezioni e convinzioni errate, mentre Schoenfeld (1985) pone l'accento su un paradosso dell'apprendimento: la possibilità che gli studenti sviluppino, in modo formalmente coerente, delle "concezioni scorrette", specialmente per quanto concerne l'applicazione di procedure automatizzate.

In questo filone di ricerca, di particolare rilievo è il contributo di Rosetta Zan. L'autrice definisce le misconcezioni come "convinzioni specifiche scorrette" responsabili di errori sistematici che si presentano in forme e contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite di cui il soggetto non è consapevole, agendo quindi in modo "subdolo e sottile". Sottolinea: «Gli studi in quest'area sono accomunati dall'enfasi su alcuni aspetti, che li differenzia in modo netto dagli studi precedenti sull'analisi degli errori [...]:

- la motivazione a capire le radici dei misconcetti, e non solo ad eliminarli
- lo sforzo di assumere il punto di vista di chi apprende, piuttosto che quello dell'esperto
- l'accettazione della ragionevolezza dei misconcetti e quindi la necessità che l'allievo ne percepisca i limiti come pre-requisito per modificarli» (Zan, 2002)

Il concetto di misconcezione ha così subito un'importante evoluzione semantica, passando da una visione puramente negativa a una prospettiva funzionale all'apprendimento. Sebbene sia stata spesso utilizzata come sinonimo di "errore", la ricerca contemporanea invita a interpretarla in senso costruttivo: essa non è una mancanza di conoscenza, ma il frutto di una conoscenza precedente che, pur essendosi rivelata efficace in passato, risulta inadeguata di fronte a una nuova situazione.

D'Amore (1999) e Sbaragli (2005) hanno ulteriormente approfondito questa fenomenologia, delineando una distinzione tra due tipologie di misconcezioni: «Le misconcezioni "evitabili" derivano direttamente dalla trasposizione didattica del sapere, in quanto sono, appunto, una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti. [...] Le misconcezioni "inevitabili" derivano solo indirettamente dalla trasposizione didattica, essendo imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere

per poter comunicare, sapere iniziale che non potrà mai essere esaustivo dell'intero concetto matematico che si vuol proporre. In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come inevitabili momenti di passaggio nella costruzione dei concetti.≫

Alcuni esempi. Un esempio classico di misconcezione inevitabile è legato all'operazione di moltiplicazione. Lo studente, operando inizialmente nell'insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$), sviluppa il modello intuitivo secondo cui "la moltiplicazione accresce sempre i fattori". Questa convinzione, pur essendo corretta in $\mathbb{N}$, diventa una "concezione parassita" quando si estende il calcolo ai numeri razionali ($\mathbb{Q}$), dove il prodotto tra numeri decimali minori di 1 produce un risultato minore dei fattori, generando un profondo malessere cognitivo nell'allievo. Altre misconcezioni ricorrenti includono:

- **Convinzioni sul segno:** l'idea che un numero sia negativo solo se preceduto esplicitamente dal segno "-", portando a difficoltà nel comprendere espressioni variabili come $-x$.
- **Confronto tra decimali:** la convinzione che, poiché $31 > 5$, allora $0,31 > 0,5$.
- **Confusione geometrica:** la difficoltà nel riconoscere un quadrato se ruotato rispetto alla base, classificandolo erroneamente come un rombo.

1.2 Etniadi: quesiti comunemente sbagliati

La nascita delle Etniadi risale al 1992, anno in cui il Nucleo di Ricerca e di Sperimentazione Didattica del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Catania ha promosso questo progetto. L'iniziativa è scaturita dalla volontà del Dipartimento di consolidare il legame con la società civile, con il duplice obiettivo di avvicinare i giovani allo studio della disciplina e di mostrare la pervasività della matematica in tutti gli ambiti del vivere civile.

Nel corso delle numerose edizioni, la gara ha visto una partecipazione costante e significativa, con una media superiore ai 300 studenti per edizione, selezionati dai docenti dei rispettivi istituti scolastici di provenienza. La competizione si articola in una prova della durata di due ore, durante la quale i partecipanti sono chiamati a risolvere dieci quesiti distribuiti su diversi nuclei tematici: Aritmetica e Algebra, Geometria piana, Geometria solida, Logica, Probabilità e Statistica.

Un aspetto di particolare interesse scientifico risiede nel lavoro di analisi svolto dai comitati organizzatori che, per le edizioni comprese tra il 1992 e il 2019, hanno classificato i quesiti secondo un ordine di difficoltà crescente. Il parametro utilizzato per tale classificazione è il "coefficiente di difficoltà", definito come la percentuale di studenti che non ha fornito la risposta corretta al quesito.

L'analisi storica di questi dati evidenzia una tendenza costante, che trova piena conferma nelle osservazioni da me condotte sulle edizioni 2023, 2024 e 2025: le maggiori criticità si riscontrano sistematicamente nei quesiti di Geometria (sia piana che solida) e di Probabilità, i quali presentano un coefficiente di difficoltà superiore a 50 per la maggior parte delle occorrenze. Al contrario, l'ambito in cui gli studenti manifestano una maggiore padronanza e sicurezza risulta essere quello dell'Aritmetica e dell'Algebra.

1.2.1 Edizioni del 2023, 2024 e 2025

L'attività di supporto svolta nel 2024 durante la correzione degli elaborati delle Etniadi ha rappresentato un momento decisivo per la definizione del presente lavoro. L'analisi delle risposte fornite dai partecipanti ha rivelato un dato di particolare interesse didattico: la ricorrenza di errori sistematici tra loro identici.

Questa evidenza suggerisce che tali errori non siano riconducibili a semplici sviste individuali o a mancanze mnemoniche, ma siano piuttosto il segnale di "malesseri cognitivi" (D'Amore, 2005) comuni. In linea con l'approccio di Rosetta Zan, si è scelto quindi di analizzare una selezione di questi quesiti per risalire alla radice del

problema, ovvero alla misconcezione che ha indotto gli studenti a formulare una risposta errata seppur coerente con il loro sistema di convinzioni.

È doveroso sottolineare che le analisi condotte nel presente lavoro si configurano come deduzioni basate sulla simulazione di percorsi risolutivi volutamente errati, successivamente confrontati con le risposte fornite dagli studenti. Tale approccio metodologico è reso necessario dalle modalità di svolgimento delle gare: i partecipanti, infatti, sono tenuti alla sola compilazione di una griglia delle risposte, senza l'obbligo di consegnare gli elaborati contenenti i ragionamenti o i calcoli intermedi.

Di conseguenza, il processo di individuazione delle misconcezioni non è avvenuto tramite l'osservazione diretta delle procedure scritte, bensì attraverso un'analisi a ritroso (*backward analysis*). Partendo dall'errore sistematico riscontrato con maggior frequenza, si è cercato di ricostruire il modello mentale o il limite procedurale che ha condotto gli studenti a tale specifico risultato, fornendo così un'interpretazione plausibile (ma non certa!) dei meccanismi cognitivi attivati durante la prova.

2023. L'edizione del 2023 ha visto la partecipazione di 316 studenti. L'analisi dei dati evidenzia una notevole variabilità nella percentuale dei tentativi di risposta: si passa da un minimo del $49,37\%$ per il sesto quesito a un massimo del $98,1\%$ per il nono. Un dato rilevante riguarda i quesiti di Geometria, che hanno registrato mediamente il minor numero di tentativi, confermando le difficoltà generalizzate degli studenti nel gestire modelli spaziali. Al contrario, i quesiti di Probabilità, pur richiedendo competenze di Calcolo combinatorio (spesso scarse nella scuola secondaria), hanno mostrato una percentuale di successo sorprendentemente alta. All'interno di questo scenario, due quesiti in particolare hanno attirato l'attenzione per la natura degli errori riscontrati: il quinto e il settimo.

Quesito 5: La canna spezzata. *Una canna verticale alta 8 metri si è spezzata per il forte vento. La sua parte superiore si è piegata fino a toccare il terreno a 2 metri di distanza dalla base della canna. A quale altezza da terra si è spezzata?*

Il quesito ha registrato una partecipazione dell'$88,6\%$, ma gli esiti appaiono

estremamente frammentati tra tre opzioni principali: 50 studenti hanno risposto *4*, 44 hanno indicato la risposta corretta *3,75* e 43 hanno indicato *3*. L'analisi delle risposte suggerisce che l'errore non sia di natura calcolistica, ma risieda nella differente interpretazione geometrica del fenomeno fisico. Chi ha risposto correttamente ha modellizzato la situazione tramite un triangolo rettangolo (applicando il Teorema di Pitagora). Al contrario, la risposta *4* suggerisce il ricorso a un modello di simmetria elementare (triangolo isoscele), ipotizzando che la canna si sia spezzata esattamente a metà. Infine, la risposta *3* sembra derivare da un'errata decodifica del testo o della figura, scambiando la distanza orizzontale con una misura verticale.

Quesito 7: Scomposizione di un volume cubico. *Utilizzando tutti i cubetti che formano il cubo di lato 6 cubetti, puoi ricostituire tre cubi interi. Quanti sono i cubetti che compongono ciascuno dei tre cubi?*

Sebbene sia stato il secondo quesito più tentato (309 risposte), solo 52 studenti hanno risposto correttamente. Il dato più significativo è che il $58,9\%$ dei partecipanti ha fornito la medesima risposta errata: *72*. Dall'analisi svolta, emerge con chiarezza l'applicazione di un modello aritmetico lineare a un problema di natura geometrica: gli studenti si sono limitati a dividere il volume totale per tre ($\frac{6^3}{3} = \frac{216}{3} = 72$). Questo errore denota due criticità:

- Una profonda misconcezione del concetto di volume e della sua scomposizione in solidi regolari (non è stato considerato che il volume di un cubo deve essere un "cubo perfetto");
- Una carenza nei processi di controllo e verifica del risultato: lo studente non si è accorto che 72 non è il cubo di alcun numero intero, accettando come plausibile un risultato geometricamente impossibile nel contesto dato.

2024. Nel 2024, le gare individuali hanno visto la partecipazione di 320 studenti. Sebbene la percentuale di tentativi di risposta sia stata molto elevata (compresa tra il 70% e il 97%), l'analisi degli esiti ha evidenziato che la risposta più frequente non sempre coincideva con quella corretta. Le criticità maggiori sono emerse nei domini

della Geometria e della Probabilità. In particolare, sono stati selezionati tre quesiti emblematici — il terzo, il quinto e il settimo — la cui analisi statistica permette di ipotizzare la presenza di specifiche misconcezioni.

Quesito 3: Il dosa spaghetti. *Carla ha trovato sul tavolo della cucina il dosa spaghetti che la mamma stava utilizzando. Questo strumento presenta quattro fori circolari di dimensioni crescenti che permettono di dosare quantità di spaghetti corrispondenti a una, due, tre o quattro porzioni. Incuriosita, ha misurato con un righello i diametri dei fori: quello per una porzione misura 18 mm. Quanti millimetri misura il diametro del foro per due porzioni?*

Il quesito ha registrato una partecipazione del 95%. Tuttavia, ben 146 studenti $(45,62\%)$ hanno fornito la risposta errata *36*, a fronte di soli 59 partecipanti $(18,44\%)$ che hanno individuato la soluzione corretta $18\sqrt{2}$. L'errore sistematico riscontrato suggerisce una chiara misconcezione legata alla proporzionalità: gli studenti hanno applicato un modello di linearità semplificato, ipotizzando che al raddoppiare delle porzioni (e quindi dell'area del cerchio) debba raddoppiare anche il diametro. Questa risposta evidenzia la mancata consapevolezza del legame quadratico tra il raggio e l'area di una figura piana, portando gli allievi a trascurare la relazione $A = \pi r^2$.

Quesito 5: Capacità del contenitore cubico. *Il contenitore in figura è stato ottenuto da una scatola cubica di spigolo 10 cm, a cui è stata tolta una parte secandola con un piano passante per la diagonale HF della faccia superiore e per il vertice C della faccia inferiore. Qual è, in litri, la capacità del contenitore?*

Questo quesito ha rappresentato una delle maggiori sfide della prova: solo 7 studenti hanno risposto correttamente. Circa il 30% dei partecipanti ha fornito la medesima risposta errata: *0,75*. In questo caso, la misconcezione sembra derivare da un'errata interpretazione della rappresentazione bidimensionale di un oggetto tridimensionale. Gli studenti, influenzati probabilmente da uno stereotipo visivo, hanno interpretato la parte rimossa come un quarto del volume totale del cubo (1/4 di 1000 cm^3), anziché riconoscere nel solido rimosso una piramide a base triangolare

(il cui volume è 1/6 del cubo).

Quesito 7: Probabilità composta e urne. *Due urne contengono palline bianche e nere. La prima contiene 5 bianche e 10 nere; la seconda 3 bianche e 7 nere. Si estrae una pallina a caso dalla seconda urna e la si inserisce nella prima. Successivamente, si estrae una pallina dalla prima urna. Qual è la probabilità che quest'ultima sia bianca?*

All'ultimo quesito ha risposto l'80% dei partecipanti e solo in 16 hanno risposto correttamente. Tra le risposte errate, la più frequente (fornita da 14 studenti) è derivata da un'analisi parziale dell'evento aleatorio. La corretta risoluzione richiedeva l'applicazione del teorema della probabilità totale, considerando i due casi mutualmente esclusivi (estrazione di una pallina bianca o nera dalla seconda urna). Gli studenti che non hanno risposto correttamente hanno considerato esclusivamente lo scenario in cui la prima pallina trasferita fosse bianca, ignorando l'incertezza legata al primo evento. Tale errore può essere interpretato come un ostacolo cognitivo legato alla difficoltà di coordinare eventi in sequenza e di visualizzare lo spazio campionario completo.

2025. L'ultima edizione presa in esame ha coinvolto un campione di 298 studenti. In linea con le rilevazioni precedenti, la percentuale di tentativi di risposta è rimasta elevata, oscillando tra il $48,7\%$ e il 96%. Nonostante un andamento generale delle prestazioni soddisfacente, le criticità maggiori sono emerse ancora una volta nei domini della Geometria e della Probabilità. In particolare, tre quesiti sono risultati emblematici per l'analisi delle misconcezioni e delle strategie risolutive incomplete.

Quesito 5: Il Palio di Siena. *Al palio di Siena la probabilità che vinca Pantera è data 1 contro 3 e la probabilità che vinca Valdimontone è data 1 contro 5. Qual è la probabilità che non vinca né Pantera né Valdimontone?*

Il quesito ha registrato un'alta partecipazione (263 risposte), ma ha indotto in errore circa il $20,5\%$ dei candidati, i quali hanno fornito come risposta *0,625*. L'errore risiede in un'errata modellizzazione della dipendenza tra gli eventi: gli studenti

hanno probabilmente applicato in modo improprio il teorema della probabilità composta (prodotto delle probabilità degli eventi contrari), trattando la sconfitta delle due contrade come eventi indipendenti. Al contrario, trattandosi di eventi mutuamente esclusivi (incompatibili) all'interno della stessa gara, la risoluzione corretta richiedeva l'applicazione della probabilità totale per l'evento complementare.

Quesito 10: L'aquilone asimmetrico. *Lucia vuole costruire un aquilone incollando due bacchette lunghe 6 dm e 10 dm. Le bacchette non sono perpendicolari e formano un angolo di 60 gradi. Quanto varrà l'area dell'aquilone?* Nonostante non sia stato tra i quesiti più tentati, oltre la metà di coloro che hanno risposto (110 studenti) ha fornito la medesima risposta errata: *30*.

Si può ipotizzare che l'errore derivi da una semplificazione indebita del modello geometrico. Gli studenti hanno trattato le bacchette (diagonali del quadrilatero) come se fossero base e altezza di un triangolo rettangolo, applicando la formula $\frac{b \cdot h}{2}$ ($6 \cdot 10/2 = 30$). Tale approccio denota una chiara misconcezione legata alla persistenza del modello dell'angolo retto anche in presenza di un dato esplicito differente (60°).

Quesito 9: Differenza di quadrati. *Ogni numero multiplo di 4 si può esprimere come differenza di due quadrati aventi basi a e b intere positive ($a > b$). Calcola i valori di (a,b) nel caso in cui il multiplo sia 64.*

Questo quesito è particolarmente interessante per evidenziare un limite non solo concettuale, ma metodologico. Su 265 risposte, ben 172 sono risultate incomplete: 141 studenti hanno indicato solo la coppia $(10, 6)$ e 31 solo la coppia $(17, 15)$, a fronte della risposta corretta che le richiedeva entrambe. L'errore risiede nella mancata esplorazione sistematica delle possibilità: gli studenti si sono fermati alla prima scomposizione di 64 trovata ($64 = 32 \cdot 2$ oppure $64 = 16 \cdot 4$), manifestando quella che in didattica viene definita "convinzione dell'unicità della soluzione". La mancanza di un processo di verifica sulla completezza della richiesta ha impedito loro di indagare ulteriormente il problema una volta individuata una soluzione valida.

1.3 Dall'idea alla sperimentazione

L'attività di supporto svolta durante le recenti edizioni delle Etniadi, unita alla curiosità circa l'origine di determinati errori sistematici, ha costituito l'impulso primario per l'analisi presentata nei paragrafi precedenti. Tale indagine ha permesso di evidenziare come alcuni domini della matematica — in particolare la Geometria e la Probabilità — favoriscano l'emergere di criticità strutturali negli studenti, dove concezioni errate o parziali arrivano ad alterare profondamente i processi di ragionamento.

L'approfondimento teorico ha permesso di inquadrare queste osservazioni empiriche all'interno del costrutto di "misconcezione", conducendomi ad adottare l'approccio metodologico di Rosetta Zan. Sono infatti convinto che l'errore non debba essere demonizzato, bensì analizzato rigorosamente affinché la didattica possa, in futuro, prevenirlo o trasformarlo in risorsa. Nello specifico, ho cercato di assumere il punto di vista dell'apprendente attraverso la già citata backward analysis: ripercorrendo i quesiti e commettendo volontariamente errori procedurali specifici, ho potuto riscontrare una perfetta coincidenza tra i risultati ottenuti in simulazione e i dati reali forniti dai partecipanti alle gare.

Tuttavia, per validare tali inferenze, ho ritenuto opportuno affiancare all'analisi dei dati delle Etniadi una sperimentazione diretta sul campo, condotta presso un istituto scolastico attraverso la somministrazione di quesiti analoghi a quelli delle competizioni. A differenza del contesto di gara, questa fase sperimentale ha permesso di accedere ai protocolli degli studenti, ovvero ai loro svolgimenti completi e non solo ai risultati finali. La disponibilità di tali documenti è stata fondamentale per studiare la genesi degli errori e proporre, di conseguenza, un intervento didattico mirato basato su tecniche specifiche.

1.3.1 Perché la Probabilità?

La scelta del dominio su cui focalizzare la sperimentazione è ricaduta sulla Probabilità. Tale decisione è stata dettata sia dalla particolarità dei contenuti intrinsechi alla disciplina, sia dalla consapevolezza del ruolo marginale che quest'ultima occupa spesso nella pratica d'insegnamento scolastico, nonostante la sua rilevanza nel paradigma matematico contemporaneo.

Poiché per molti studenti della scuola secondaria di secondo grado la Probabilità rappresenta un ambito ancora poco esplorato, la scelta di questo dominio è stata motivata anche dal desiderio di osservare come gli allievi si approccino a un argomento quasi del tutto nuovo. Questo contesto ha permesso di analizzare i loro processi di ragionamento a livello intuitivo, mettendo in luce le strategie spontanee adottate in assenza di un bagaglio strutturato di conoscenze formali.

Infine, la Probabilità costituisce un nucleo tematico che si raccorda efficacemente con i percorsi di Educazione Civica, in particolare per quanto riguarda la valutazione del rischio e la comprensione dei fenomeni aleatori nella società. Proprio per questa sua valenza formativa e interdisciplinare, la presente sperimentazione è stata inserita ufficialmente nel percorso di Educazione Civica della classe coinvolta.

Il quadro normativo: le Indicazioni Nazionali. La scelta di focalizzare l'intervento didattico sulla Probabilità trova un riscontro fondamentale nelle *Indicazioni Nazionali per i Licei*. Il Ministero, infatti, non configura questo dominio come un semplice capitolo isolato, ma come uno strumento indispensabile per sviluppare la capacità di modellizzare l'incertezza e per formare un pensiero critico nel cittadino.

In particolare, per i licei, le linee guida prevedono un percorso che va dalla comprensione intuitiva del primo biennio fino allo studio delle variabili aleatorie e delle distribuzioni di probabilità nel quinto anno. Nonostante la loro importanza trasversale, le Indicazioni stesse mettono in guardia i docenti sulla complessità del tema, suggerendo di prestare attenzione ai limiti dei modelli matematici rispetto alla realtà. Questa raccomandazione sembra quasi presagire la facilità con cui gli

studenti possono scivolare in convinzioni ingenue o misconcezioni, proprio a causa della natura controintuitiva di molti concetti probabilistici. In questo senso, la mia sperimentazione si inserisce perfettamente nel solco normativo, cercando di colmare il divario tra quanto richiesto dal curriculum nazionale e le reali difficoltà riscontrate nei protocolli degli studenti.

1.3.2 Struttura della sperimentazione

L'attività sperimentale si è svolta in un arco temporale di circa un mese, dal 12 marzo al 16 aprile 2026, coinvolgendo una classe terza del Liceo Statale "Enrico Boggio Lera" di Catania composta da 15 studenti. Il percorso è stato articolato in tre incontri chiave, strutturati per monitorare l'evoluzione delle competenze degli studenti e l'efficacia delle metodologie adottate:

- **Primo incontro (1 ora):** In questa fase iniziale è stato somministrato un *pre-test* diagnostico. Ho selezionato tre quesiti emblematici tratti dalle edizioni delle Etniadi 2023, 2024 e 2025, con l'obiettivo di rilevare le concezioni spontanee e le eventuali misconcezioni presenti prima di ogni intervento formale.

- **Secondo incontro (2 ore):** In questa fase è stato attuato l'intervento didattico vero e proprio, impostato secondo una metodologia di laboratorio di matematica. Attraverso l'uso del gioco, gli studenti sono stati stimolati a confrontarsi con la natura controintuitiva di alcuni eventi aleatori. L'attività è proseguita con l'analisi di esempi notevoli e l'ausilio di simulazioni su Python.

- **Terzo incontro (1 ora):** L'incontro conclusivo è stato finalizzato alla verifica degli obiettivi raggiunti. Agli studenti è stato somministrato un *test finale* per valutare il consolidamento delle conoscenze e lo sviluppo di nuove competenze critiche. In chiusura, è stato proposto un questionario di gradimento, volto a raccogliere feedback qualitativi sull'esperienza didattica e sulla percezione delle metodologie utilizzate.

1.4 Domanda di ricerca

Partendo dalle riflessioni emerse durante la genesi del progetto, dall'analisi delle misconcezioni e dai presupposti metodologici dell'approccio di Rosetta Zan, il presente lavoro si propone di indagare come una proposta didattica mirata, basata su attività laboratoriali integrate alla lezione frontale, possa intervenire nel processo di destrutturazione delle misconcezioni degli studenti. Parallelamente, si intende approfondire quali strategie il docente debba adottare per favorire il raggiungimento di tale obiettivo.

In questo scenario, la domanda di ricerca che guida il lavoro è: ***In che modo un intervento didattico laboratoriale può incidere sull'apprendimento degli studenti e sulla correzione delle loro misconcezioni? E, all'interno di tale cornice didattica, come può intervenire l'insegnante e quale dovrebbe essere il suo ruolo?***

La risposta a tale interrogativo verrà esplorata nel Capitolo 5, dedicato all'analisi qualitativa delle schede prodotte dagli studenti durante la sperimentazione, all'esame dei dati raccolti mediante i questionari e a una riflessione critica sull'attività svolta sul campo.

Capitolo 2

Teoria

Il concetto di probabilità nasce dall'esigenza di quantificare l'incertezza legata al verificarsi di un dato un evento E all'interno di uno spazio campionario di esiti equiprobabili. Infatti, è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero totale dei casi possibili. In questo capitolo, esploreremo non solo come *contare* i diversi casi, ma anche le relazioni logiche e matematiche che intercorrono tra eventi diversi, fornendo così il quadro concettuale su cui si è sviluppata la sperimentazione didattica oggetto di questa tesi.

2.1 Calcolo combinatorio

«In quanti modi diversi possono essere estratti i cinque numeri di un concorso a premi?», «Quante password alfanumeriche di otto caratteri è possibile generare per garantire la sicurezza di un sistema?», «Quante sono tutte le colonne che si possono giocare al Superenalotto?». Questi sono solo alcuni dei quesiti che nascono spontaneamente in ambiti eterogenei della vita quotidiana e, sebbene possano apparire di immediata risoluzione, i problemi di conteggio di questa portata sono tipicamente non banali e richiedono un approccio metodologico rigoroso. Lo strumento matematico d'elezione in questo contesto è il calcolo combinatorio, la cui arte è quella di enumerare tutte le possibilità affinché non ne venga trascurata alcuna, come scrisse

Leibiniz in *Dissertatio de arte combinatoria* (1666).

Lo scopo di questa sezione è, pertanto, quello di presentare i costrutti teorici e le tecniche fondamentali di tale arte, definendo i presupposti necessari per affrontare con consapevolezza le tematiche probabilistiche che verranno trattate nei capitoli successivi.

2.1.1 Introduzione al pensiero combinatorio

Il Calcolo combinatorio è strettamente collegato allo studio della probabilità, in quanto fornisce gli strumenti logici e analitici necessari per enumerare correttamente i raggruppamenti possibili.

Innanzitutto, consideriamo i casi favorevoli e i casi possibili due insiemi finiti, il problema diventa quindi determinare il numero di elementi di tali insiemi, ovvero la loro cardinalità. Si ha il seguente:

Teorema 2.1.1 (Cardinalità del prodotto cartesiano)**.** *Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ insiemi finiti. La cardinalità del prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ è pari al prodotto delle cardinalità dei singoli insiemi:*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Il teorema precedente permette di determinare il numero di n-uple ordinate che si possono formare a partire da una collezione di insiemi finiti. Tale concetto può essere generalizzato nel seguente principio, fondamentale per risolvere la maggior parte dei problemi di enumerazione:

Teorema 2.1.2 (Principio fondamentale del conteggio)**.** *Sia un processo decisionale composto da una sequenza di n scelte indipendenti, tale che:*

- *la prima scelta possa essere effettuata in k_1 modi diversi;*
- *la seconda scelta possa essere effettuata in k_2 modi diversi;*
- *...*

- *la n-esima scelta possa essere effettuata in k_n modi diversi.*

Allora, il numero totale di modi in cui l'intera sequenza di scelte può essere compiuta è dato dal prodotto:

$$K = k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_n$$

dove $k_i \in \mathbb{N}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Un caso di particolare interesse del principio appena esposto si verifica quando il processo di scelta consiste nell'ordinare tutti gli n elementi di un insieme finito. In questo scenario, la prima scelta avverrà tra n oggetti, la seconda tra gli $n - 1$ rimanenti, e così via, fino all'ultima scelta obbligata tra l'unico elemento rimasto. Applicando il Principio fondamentale del conteggio, il numero totale di queste configurazioni è dato dal prodotto dei primi n numeri interi positivi.

Definizione 1. *Si definisce fattoriale di un numero naturale n, e si indica con il simbolo n!, il prodotto dei numeri interi positivi minori o uguali a n:*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

Per convenzione, e per garantire la coerenza delle formule combinatorie che verranno introdotte, si pone: $0! = 1$.

Definiti questi concetti fondamentali del Calcolo combinatorio, nelle prossime sezioni entreremo nel vivo della disciplina, esplorando gli struenti di conteggio utili per affrontare diversi problemi.

2.1.2 Permutazioni

Permutazioni semplici. Iniziamo analizzando un esempio concreto.

Esempio 1. *In quanti modi è possibile ordinare 5 libri distinti sulla mensola di una libreria?*

Per risolvere il quesito, supponiamo di numerare le posizioni sulla mensola da 1 a 5 e definiamo i seguenti insiemi:

$$A_i = \{\text{libri che è possibile collocare nell'}i\text{-esima posizione}\}.$$

Procediamo con la scelta dei libri per ogni posizione. Nella prima postazione, posso scegliere uno qualunque dei cinque libri. Nella seconda postazioni, avendo già collocato un libro, la scelta ricadrà su uno dei quattro rimanenti. Procedendo con questo ragionamento, per la terza postazione avrò tre possibilità, per la quarta ne avrò due e, infine, per l'ultima resta solo una possibilità. Osserviamo, allora, che la cardinalità di ogni insieme A_i è $5 - i + 1$.
In virtù del Principio fondamentale del conteggio, il numero totale di configurazioni possibili è pari al prodotto delle cardinalità degli insiemi A_i.

Generalizzando tale risultato, introduciamo la seguente definizione:

Definizione 2. *Dato un insieme di n elementi, si definisice permutazione semplice di n elementi ogni possibile ordinamento degli elementi stessi. Il numero di tali permutazioni si indica con* P_n.

Teorema 2.1.3.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Permutazioni con ripetizione. Proseguiamo l'analisi considerando il caso in cui alcuni elementi dell'insieme di partenza siano identici tra loro.

Esempio 2. *Quanti anagrammi, anche privi di senso, si possono formare con le lettere della parola MAMMA?*

In questo caso, disponiamo di $n = 5$ lettere, ma esse non sono tutte distinte: la lettera M si ripete $k_1 = 3$ volte, mentre la lettera A si ripete $k_2 = 2$ volte.

Se immaginassimo per un momento che tutte le lettere fossero distinte (ad esempio numerandole: $M_1A_1M_2M_3A_2$), avremo $P_5 = 5!$ permutazioni semplici. Tuttavia, scambiando tra loro le tre M in una qualunque posizione, l'anagramma risultante rimarrebbe identico. Lo stesso accadrebbe scambiando tra loro le due A.

Per ottenere il numero di configurazioni effettivamente distinte, dobbiamo quindi dividere il totale delle permutazioni semplici (5!) per il numero di modi in cui possiamo ordinare gli elementi ripetuti (3! per le M e 2! per le A), ovvero:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

Generalizzando questo ragionamento, otteniamo la seguente definizione e il relativo teorema:

Definizione 3. *Dati n elementi di cui $k_1, k_2, \ldots, k_r$ sono identici tra loro (con $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$), si definisce permutazione con ripetizione ogni possibile ordinamento di tali elementi. Il numero di tali permutazioni si indica con $P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_r)}$.*

Teorema 2.1.4.

$$P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_r!}$$

2.1.3 Disposizioni

Disposizioni semplici. Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato le permutazioni come strumento per contare gli ordinamenti di n oggetti in n posizioni. Tuttavia, in molti problemi reali, il numero di "posti" disponibili (k) è inferiore al numero di oggetti totali (n).

Esempio 3. *In una gara con 5 atleti, in quanti modi diversi si possono assegnare le medaglie d'oro, d'argento e di bronzo?*

In questo scenario, sebbene esistano 5! possibili classifiche totali, la nostra attenzione è rivolta esclusivamente alle prime tre posizioni (il podio). Consideriamo i cinque atleti A, B, C, D, E e supponiamo che A, B e C occupino rispettivamente il primo, secondo e terzo posto. Ai fini della determinazione del podio, è irrilevante l'ordine dei restanti due atleti (D ed E): sia la classifica (A, B, C, D, E) che la classifica (A, B, C, E, D) generano lo stesso podio.

Osserviamo quindi che, per ogni podio fissato, esistono 2! classifiche totali che lo contengono (corrispondenti alle permutazioni degli atleti esclusi dal podio). Per ottenere il numero di podi distinti, dobbiamo dunque dividere il totale delle permutazioni semplici per il numero di modi in cui possiamo ordinare gli elementi "non scelti" $(n - k = 2)$:

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Generalizzando questo ragionamento, otteniamo la seguente definizione e il relativo teorema:

Definizione 4. *Sia X un insieme con n elementi e k un numero naturale con $1 \leq k \leq n$; si definisce disposizione semplice di n oggetti in k posti una $k-$upla di elementi distinti di X, ovvero un elemento del tipo $(x_1, x_2, ..., x_k)$ con $x_i \in X$ e $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Il numero di tali disposizioni si indica con $D_{n,k}$.*

Teorema 2.1.5.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1).$$

Osservazione 1.

$$P_n = D_{n,n}.$$

Disposizioni con ripetizione. Analizziamo ora il caso in cui gli elementi di un insieme possono essere selezionati più di una volta per occupare le posizioni disponibili.

Esempio 4. *In quanti modi è possibile comporre un codice PIN di 5 cifre utilizzando le cifre da 0 a 9?*

In questo scenario, dobbiamo disporre $n = 10$ elementi in $k = 5$ posizioni, con la possibilità che un elemento compaia più volte (ad esempio, il codice $(0, 0, 0, 0, 0)$ è un PIN valido). Conducendo un ragionamento analogo a quello svolto per le permutazioni semplici, numeriamo le posizioni del codice da 1 a 5 e definiamo i seguenti insiemi:

$$A_i = \{\text{cifre che è possibile collocare nell'}i\text{-esima posizione}\}.$$

Poiché in ogni posizione la scelta non è vincolata dai valori inseriti precedentemente, ogni insieme A_i contiene tutte le dieci cifre iniziali; pertanto, la cardinalità di ciascun insieme è costantemente A_i è pari a 10.

In virtù del Principio fondamentale del conteggio, il numero totale di configurazioni possibili è pari al prodotto delle cardinalità degli insiemi A_i:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 = 100.000$$

Generalizzando tale risultato, introduciamo la seguente definizione:

Definizione 5. *Sia X un insieme di n elementi e k un numero naturale positivo. Si definisce disposizione con ripetizione di n oggetti di classe k ogni k-upla ordinata di elementi appartenenti a X, anche non distinti. Due disposizioni con ripetizione sono considerate diverse se differiscono per l'ordine degli elementi o per almeno un elemento. Il numero di tali disposizioni si indica con $D'_{n,k}$.*

Teorema 2.1.6.

$$D'_{n,k} = n^k.$$

2.1.4 Combinazioni

Combinazioni semplici. Negli studi condotti finora sulle disposizioni, l'attenzione era focalizzata sia sulla selezione degli elementi sia sulla loro posizione relativa; in quel contesto, cambiare l'ordine dei componenti significava generare una configurazione distinta. Tuttavia, in molte situazioni reali e problemi matematici, l'ordine di estrazione o di posizionamento risulta irrilevante ai fini del risultato finale. Riprendiamo l'esempio della gara atletica per evidenziare la differenza sostanziale tra l'ordinare e il selezionare.

Esempio 5. *In una gara con 5 atleti, i primi 3 classificati, indipendentemente dall'ordine d'arrivo, ottengono il diritto di partecipare alle Olimpiadi. Quante diverse squadre di tre atleti possono qualificarsi?*

In questo caso, la differenza risiede nell'irrilevanza dell'ordine dei primi tre classificati. Infatti, se gli atleti A, B e C sono i vincitori, essi verranno selezionati per le Olimpiadi a prescindere da chi di loro sia arrivato primo, secondo o terzo. Ne consegue che le $3! = 6$ diverse configurazioni del podio che coinvolgono questi tre atleti generano la medesima squadra di qualificati.

Pertanto, nel calcolare il numero di squadre distinte, dobbiamo dividere le 5! possibili classifiche totali sia per i diversi modi di ordinare gli atleti che restano esclusi dalle posizioni di vertice (2!, come visto per le disposizioni), sia per i diversi modi di ordinare gli atleti sul podio (3!):

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10$$

Generalizzando questo ragionamento, otteniamo la seguente definzione e il realtivo teorema:

Definizione 6. *Siano X un insieme con n elementi e k un numero naturale con $1 \leq k \leq n$; diremo combinazione semplice di n oggetti in k posti un sottoinsieme di X composto da k elementi. Il numero di tali combinazioni si indica con $C_{n,k}$.*

Teorema 2.1.7.

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,.$$

Combinazioni con ripetizione. Concludiamo l'analisi dei modelli di conteggio affrontando il caso in cui l'ordine non è rilevante, ma è consentito selezionare lo stesso elemento più di una volta.

Esempio 6. *In una gelateria sono disponibili 3 gusti di gelato: Cioccolato, Crema e Fragola. In quanti modi diversi è possibile comporre una coppa da 5 palline?*

In questo problema, l'ordine con cui il gelataio inserisce le palline nella coppa non cambia il risultato finale (l'ordine non conta). Tuttavia, a differenza delle combinazioni semplici, possiamo ripetere i gusti (ad esempio, una coppa con 5 palline tutte al Cioccolato).

Per risolvere questo quesito, si utilizza solitamente una tecnica nota come *"metodo delle stelle e delle barrette"*. Immaginiamo di rappresentare le 5 palline con delle stelle ($\star$) e di separare i gusti con delle barrette ($|$). Se abbiamo 3 gusti, ci serviranno 2 barrette per creare tre spazi separati. Ad esempio:

$\star\star\,|\,\star\,|\,\star\star$ rappresenta 2 palline di Cioccolato, 1 di Crema e 2 di Fragola.

$\star\star\star\star\star||$ rappresenta 5 palline di Cioccolato e nessuna degli altri gusti.

Il problema si riduce quindi a contare in quanti modi possiamo disporre 7 oggetti totali (5 stelle + 2 barrette) in 7 posti, ovvero scegliere le posizioni delle 5 stelle tra le 7 disponibili: $C_{7,5} = 21$.

Generalizzando questo ragionamento, introduciamo la seguente definizione e il relativo teorema:

Definizione 7. *Sia X un insieme di n elementi e k un numero naturale. Si definisce combinazione con ripetizione ogni raggruppamento di k elementi scelti tra gli n disponibili, indipendentemente dall'ordine e con la possibilità di ripetere gli elementi. Il numero di tali combinazioni si indica con $C'_{n,k}$.*

Teorema 2.1.8. *Il numero di combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k è equivalente al numero di combinazioni semplici di $n + k - 1$ elementi di classe k:*

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

2.1.5 Il coefficiente binomiale

Giunti a questo punto, abbiamo osservato come il calcolo delle combinazioni semplici richieda l'utilizzo di una frazione composta da diversi fattoriali. Per facilitare la

scrittura di queste operazioni e per permetterne un utilizzo più agile nelle formule algebriche, nel corso dei secoli diversi matematici hanno introdotto un operatore specifico chiamato coefficiente binomiale. Tale operatore non rappresenta soltanto una sintesi notazionale delle combinazioni, ma costituisce un cardine dell'analisi matematica e dell'algebra.

Definizione 8. *Dati due numeri naturali n e k, con $0 \leq k \leq n$, si definisce coefficiente binomiale, e si indica con il simbolo $\binom{n}{k}$, la quantità:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il nome "binomiale" deriva dal ruolo centrale che questo valore ricopre nel *Teorema del binomio di Newton*, il quale permette di determinare lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

In sintesi, il coefficiente binomiale è strettamente collegato al Calcolo combinatorio perché rappresenta il numero di modi in cui possiamo scegliere un sottoinsieme di k elementi da un insieme di n. Ovvero:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Infine, introduciamo l'importante proprietà di simmetria attraverso un'osservazione.

Osservazione 2. *Scegliere k compagni per una squadra di calcetto tra n amici equivale a scegliere gli $n-k$ che resteranno in panchina. Il numero di modi in cui si può compiere questa azione deve essere necessariamente lo stesso:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2.2 Probabilità

Il concetto di probabilità permea la nostra quotidianità: dalle previsioni meteorologiche alle valutazioni di rischio economico, fino alle semplici scommesse sui giochi di sorte. Tuttavia, la trasformazione di questa intuizione in una teoria matematica rigorosa è stata un processo storico lungo e complesso. Sebbene i primi studi sistematici sui giochi d'azzardo risalgano a figure come Gerolamo Cardano e Galileo Galilei, la nascita della teoria della probabilità moderna viene convenzionalmente attribuita al celebre scambio epistolare del 1654 tra Blaise Pascal e Pierre de Fermat. Il loro confronto sul *problème des partis* (la ripartizione della posta in un gioco interrotto) gettò le basi per il Calcolo combinatorio e la valutazione razionale dell'incertezza. Nel corso dei secoli, l'esigenza di modellizzare fenomeni aleatori differenti ha portato alla formulazione di diversi approcci epistemologici. Dato un evento E, la sua probabilità $P(E)$ può essere interpretata secondo tre visioni principali:

- **Definizione classica (Laplace):** è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di E e il numero dei casi possibili, a condizione che questi siano tutti ugualmente probabili (principio di indifferenza).

- **Definizione frequentista (von Mises):** si basa sulla legge empirica del caso e definisce la probabilità come il valore a cui tende la frequenza relativa dell'evento al crescere del numero di prove effettuate nelle medesime condizioni.

- **Definizione soggettiva (de Finetti):** è il grado di fiducia che un individuo coerente ripone nel verificarsi di un evento. Matematicamente, è espressa come il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere una vincita unitaria se l'evento si verifica, e nulla in caso contrario.

A queste visioni si è aggiunto, nel XX secolo, l'approccio assiomatico di Andrey Kolmogorov. Questa formulazione non fornisce un metodo operativo per calcolare la probabilità, ma ne definisce la struttura logica e matematica. Essa poggia sul

concetto di σ-algebra e tratta la Probabilità come una particolare funzione di misura applicata a uno spazio campionario. Essendo una teoria formale, l'assiomatica è compatibile con qualunque interpretazione (oggettivista o soggettivista) si voglia dare al valore numerico ottenuto.

In questa tesi, l'analisi si concentrerà prevalentemente sulla probabilità classica, in coerenza con il percorso didattico e la sperimentazione svolta in classe.

2.2.1 Introduzione alla Probabilità classica

In questa sezione, forniremo dei concetti chiave della Teoria della Probabilità attraverso degli esempi che ci permetteranno di visualizzare gli aspetti teorici trattati.

Esempio 7. *Lanciamo un dado a 4 facce numerate da 1 a 4. Qual è la probabilità che esca un numero pari?*

Attenzioniamo quello che stiamo facendo: lanciando un dado stiamo facendo un'esperimento *aleatorio* di cui non conosciamo con certezza il risultato, ma possiamo prevedere tutti i risultati possibili. Inoltre, siamo interessati ad uno specifico risultato: che esca un numero pari. Per studiare matematicamente gli esperimenti aleatori diamo le seguenti definizioni.

Definizione 9.
1. *Un esperimento aleatorio è un fenomeno di cui non riusciamo a prevedere il risultato con certezza.*
2. *L'insieme $\mathcal{U}$ di tutti i possibili risultati di un esperimento, detti esiti, si chiama spazio campionario o universo.*
3. *Un evento E è un qualunque sottoinsieme dello spazio campionario; un evento formato da un singolo risultato dell'esperimento è detto evento elementare.*

Inoltre, chiamiamo spazio degli eventi l'insieme di tutti gli eventi che si possono associare a un esperimento, cioè l'insieme delle parti di $\mathcal{U}$.

Tornando all'esempio precedente, quindi, lo spazio campionario è $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$, cioè l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento aleatorio, mentre l'evento

è $E = \{2, 4\}$, ovvero "esce un numero pari". Osserviamo che l'insieme universo $\mathcal{U}$ è l'insieme di tutti i casi possibili, mentre il suo sottoinsieme E rappresenta l'insieme dei casi favorevoli, ossia di quelli in cui l'evento E è verificato. Il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero di quelli possibili fornisce una stima sulla possibilità che l'evento E si verichi. Introduciamo, allora la seguente:

Definizione 10. *La probabilità di un evento E è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli f e quello dei casi possibili u quando sono tutti ugualmente possibili. In simboli,*

$$P(E) = \frac{f}{u}.$$

Considerando la definizione classica di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, è evidente che il numero dei successi non possa mai eccedere il numero totale degli esiti dello spazio campionario. Da questa osservazione discendono le proprietà fondamentali della misura di probabilità:

- **Intervallo di valori:** La probabilità di un evento E è sempre compresa tra zero e uno:
$$0 \leq P(E) \leq 1$$

- **Evento certo:** Se $P(E) = 1$, l'evento E si verificherà con certezza (il numero dei casi favorevoli coincide con quello dei casi possibili).

- **Evento impossibile:** Se $P(E) = 0$, l'evento E non può verificarsi (il numero dei casi favorevoli è nullo).

A questo punto siamo in grado di descrivere il problema, ma non di risolverlo. Per fare ciò bisogna elencare le "regole fondamentali" di calcolo delle probabilità, anche dette assiomi.

A1. La probabilità è una legge che ad ogni evento elementare dello spazio campionario associa uno e un solo valore reale compreso tra 0 e 1.

A2. La somma di tutti gli eventi elementari è 1.

A3. La probabilità di un qualunque evento E è la somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono. La probabilità dell'insieme vuoto è zero.

Definizione 11. *La coppia $(\mathcal{U}, P)$ viene detta Spazio di Probabilità. $\mathcal{U}$ può avere un numero finito o infinito di eventi elementari, mentre P è una legge che soddisfa i tre assiomi.*

Da quanto detto finora si può dire che: la probabilità di un evento è un valore che misura la sicurezza che tale evento si verifichi; più è sicuro che si verifichi, maggiore è il valore.

Esempio 8. *Lanciamo un dado regoalre a 6 facce. Lo spazio campionario è $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si ha che $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$, in virtù di **A2**.*

Osserviamo che nel lancio di un dado regolare a 6 facce, come nell'esempio precedente, tutti gli eventi elementari hanno stessa probabilità di riuscita, cioè sono equiprobabili. In questo caso si parla di spazio di probabilità uniforme.

Il ruolo del Calcolo combinatorio nella Probabilità. Spesso la complessità di un esperimento aleatorio risiede nell'elevato numero di esiti possibili, il che rende proibitivo il conteggio manuale degli elementi dello spazio campionario. In tali contesti, il Calcolo combinatorio si rivela uno strumento indispensabile per determinare rigorosamente la cardinalità degli insiemi coinvolti nella definizione classica di probabilità. Attraverso i seguenti esempi, analizzeremo come selezionare il modello combinatorio più idoneo in base alle caratteristiche del problema.

Esempio 9. *Quattro amici (A, B, C, D) acquistano quattro biglietti per il cinema in una stessa fila. Qual è la probabilità che A e B siedano vicini in quest'ordine (ovvero con A immediatamente a sinistra di B)?*

Soluzione: Lo spazio campionario $\mathcal{U}$ è costituito da tutte le possibili configurazioni in cui i quattro amici possono disporsi, ovvero le permutazioni di 4

elementi:

$$|\mathcal{U}| = P_4 = 4! = 24$$

Per calcolare i casi favorevoli, ricorriamo a un artificio logico: consideriamo la coppia (A, B) come un unico blocco indivisibile. Il problema si riduce quindi a permutare 3 oggetti (il blocco AB e i restanti amici C, D). I casi favorevoli sono dunque:

$$|E| = P_3 = 3! = 6$$

La probabilità cercata è:

$$P(E) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

L'utilizzo delle permutazioni è dunque fondamentale quando l'esperimento consiste nel variare l'ordine di un dato insieme di elementi distinti.

Esempio 10. *In una corsa con 10 cavalli, qual è la probabilità di indovinare l'ordine d'arrivo dei primi tre classificati (podio) giocando una terna casuale?*

Soluzione: Il numero totale di podi possibili è dato dalle disposizioni semplici di 10 elementi di classe 3, poiché l'ordine di arrivo è rilevante e non sono ammesse ripetizioni:

$$|\mathcal{U}| = D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Poiché esiste una sola terna ordinata vincente, i casi favorevoli sono $|E| = 1$. La probabilità risulta:

$$P(E) = \frac{1}{720}$$

Le disposizioni sono necessarie ogniqualvolta la selezione degli elementi tenga conto dell'ordinamento posizionale degli stessi.

Esempio 11. *Da un'urna contenente 20 palline numerate, se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che tra le 5 estratte sia presente il numero 1?*

Soluzione: Trattandosi di un'estrazione simultanea, l'ordine non è rilevante. Il numero totale di possibili cinquine è dato dalle combinazioni di 20 elementi di classe 5:

$$|\mathcal{U}| = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15.504$$

Per determinare i casi favorevoli, fissiamo il numero 1 tra i cinque estratti. Le restanti 4 posizioni della cinquina devono essere occupate scegliendo tra i 19 numeri rimanenti nell'urna:

$$|E| = \binom{19}{4} = \frac{19!}{4! \cdot 15!} = 3.876$$

La probabilità dell'evento è data dal rapporto:

$$P(E) = \frac{\binom{19}{4}}{\binom{20}{5}} = \frac{3.876}{15.504} = \frac{1}{4}$$

In conclusione, le combinazioni rappresentano lo strumento d'elezione per i problemi in cui l'ordine di selezione è irrilevante, come nei campionamenti o nei giochi di sorte.

2.2.2 Operazioni tra eventi e proprietà

Poiché abbiamo definito gli eventi come sottoinsiemi dello spazio campionario $\mathcal{U}$, è naturale studiarne le proprietà attraverso l'algebra degli insiemi. Spesso, infatti, l'interesse non risiede in un singolo evento elementare, ma nella probabilità che si verifichino combinazioni o relazioni tra più eventi.

Esempio 12. *Si consideri un mazzo di carte regolare da 40 carte. Si determini la probabilità che:*

1. *esca una carta di Bastoni;*
2. *esca un Re;*
3. *esca il Re di Bastoni;*
4. *esca una carta di Bastoni o un Re;*

5. *non esca una carta di Bastoni;*

6. *esca una carta di Bastoni che non sia il Re.*

Definiamo l'evento A come "esce una carta di Bastoni" e l'evento B come "esce un Re". Possiamo allora tradurre le richieste dell'esempio precedente utilizzando il linguaggio della teoria degli insiemi:

1. $P(A)$; *(Evento semplice)*

2. $P(B)$; *(Evento semplice)*

3. $P(A \cap B)$; *(Intersezione: si verificano contemporaneamente A e B)*

4. $P(A \cup B)$; *(Unione: si verifica A, B o entrambi)*

5. $P(A^c)$; *(Complementare: l'evento A non si verifica)*

6. $P(A \setminus (A \cap B))$. *(Differenza: si verifica A ma non $A \cap B$)*

Definizione 12. *Si definisce evento complementare (o evento contrario) di E, e si indica con E^c, l'insieme di tutti gli esiti dello spazio campionario $\mathcal{U}$ che non appartengono ad E. Per costruzione, E ed E^c godono delle seguenti proprietà:*

- *sono eventi incompatibili: $E \cap E^c = \emptyset$;*
- *sono esaustivi: la loro unione rappresenta l'intero spazio campionario, $E \cup E^c = \mathcal{U}$;*
- *L'evento complementare del complementare coincide con l'evento stesso: $(E^c)^c = E$.*

Per procedere al calcolo delle probabilità in contesti operativi, è necessario introdurre alcuni teoremi fondamentali che derivano direttamente dagli assiomi di Kolmogorov e dalle proprietà dell'algebra degli insiemi.

Teorema 2.2.1. *La probabilità dell'evento certo è unitaria, $P(\mathcal{U}) = 1$, mentre la probabilità dell'evento impossibile è nulla, $P(\emptyset) = 0$.*

Teorema 2.2.2 (Teorema della probabilità totale)**.** *Dati due eventi qualunque A e B, la probabilità della loro unione è data dalla somma delle singole probabilità, detratta la probabilità della loro intersezione:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Definizione 13. *Due eventi si dicono incompatibili se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro, ovvero se la loro intersezione è l'insieme vuoto ($A \cap B = \emptyset$). Viceversa, se $A \cap B \neq \emptyset$, gli eventi si dicono compatibili.*

In termini intuitivi, due eventi sono incompatibili quando non possono verificarsi contemporaneamente e, in questo caso, il teorema precedente si semplifica nella forma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Esempio 13. *Si consideri l'estrazione di una pallina da un'urna contenente 5 palline rosse, 3 gialle e 4 viola. Definiamo gli eventi:*

- *A_1: "estrazione di una pallina rossa";*
- *A_2: "estrazione di una pallina viola";*
- *A_3: "estrazione di una pallina di un colore primario".*

Gli eventi A_1 e A_2 risultano incompatibili, poiché una pallina non può essere simultaneamente rossa e viola. Al contrario, A_1 e A_3 sono compatibili: l'estrazione di una pallina rossa soddisfa entrambi i criteri, essendo il rosso un colore primario.

Osservazione 3. *È importante sottolineare che due eventi complementari sono necessariamente incompatibili, mentre non vale il viceversa: due eventi possono essere incompatibili senza essere l'uno il contrario dell'altro.*

Teorema 2.2.3 (Probabilità dell'evento contrario)**.** *La probabilità che un evento non si verifichi è pari alla differenza tra l'unità e la probabilità dell'evento stesso:*

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

Teorema 2.2.4. *Se un evento A è incluso in un evento B ($A \subseteq B$), allora la probabilità della loro differenza è:*

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

Teorema 2.2.5. *In uno spazio di probabilità uniforme, la probabilità di un evento elementare u è data da $P(u) = \frac{1}{|\mathcal{U}|}$, dove $|\mathcal{U}|$ indica la cardinalità dello spazio campionario. Conseguentemente, la probabilità di un qualunque evento E è:*

$$P(E) = \frac{|E|}{|\mathcal{U}|}$$

Alla luce di questi teoremi, possiamo ora risolvere analiticamente l'esempio del mazzo di carte precedentemente introdotto. Ricordando che in un mazzo da 40 carte vi sono 10 carte di Bastoni (A) e 4 Re (B), di cui uno solo è il Re di Bastoni ($A \cap B$), otteniamo:

1. $P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$
2. $P(B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$
3. $P(A \cap B) = \frac{1}{40}$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$
5. $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
6. $P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{9}{40}$

2.2.3 Probabilità condizionata e indipendenza

Proseguiamo l'indagine probabilistica analizzando scenari in cui gli esperimenti non sono isolati, ma presentano una correlazione logica e temporale. Consideriamo il caso dell'estrazione sequenziale di due carte da un medesimo mazzo.

Esempio 14. *Si consideri un mazzo di carte regolare da 40 unità e si effettuino due estrazioni successive senza reinserimento. Si determini la probabilità che entrambe le carte estratte siano di Spade.*

In questo scenario, l'esito della prima estrazione influenza la probabilità della seconda per due fattori determinanti: la riduzione del numero totale di carte nel mazzo (casi possibili) e l'alterazione della composizione del mazzo stesso (casi favorevoli). Se la prima carta è di Spade, ne rimangono 9 nel mazzo; in caso contrario, le carte di Spade restano 10.

Definiamo gli eventi:

- E_1: "estrazione di una carta di Spade alla prima prova";
- E_2: "estrazione di una carta di Spade alla seconda prova".

La probabilità del primo evento è $P(E_1) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$. Per valutare E_2, dobbiamo distinguere due situazioni basate sull'esito di E_1:

i. Se E_1 si è verificato: rimangono 9 carte di Spade su 39 totali. La probabilità di E_2 è $\frac{9}{39}$.

ii. Se E_1 non si è verificato: rimangono 10 carte di Spade su 39 totali. La probabilità di E_2 è $\frac{10}{39}$.

Deduciamo che il verificarsi del primo evento altera la probabilità del secondo, condizionandone l'esito. Formalizziamo tale concetto con le seguenti definizioni:

Definizione 14. *Due eventi si dicono indipendenti se il verificarsi dell'uno non altera la probabilità del verificarsi dell'altro. In caso contrario, gli eventi si dicono dipendenti.*

Definizione 15. *Dati due eventi dipendenti A e B, si definisce probabilità condizionata di B rispetto ad A, e si indica con $P(B|A)$, la probabilità che l'evento B si verifichi nell'ipotesi che l'evento A sia già accaduto.*

Sulla scorta di queste definizioni, enunciamo i teoremi fondamentali per il calcolo della probabilità dell'evento intersezione (detto anche evento prodotto).

Teorema 2.2.6 (Teorema della probabilità composta per eventi dipendenti)**.** *Dati due eventi A e B compatibili e dipendenti, la probabilità del loro verificarsi simultaneo è pari al prodotto della probabilità del primo per la probabilità condizionata del secondo rispetto al primo:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Teorema 2.2.7 (Teorema della probabilità composta per eventi indipendenti)**.** *Dati due eventi A e B compatibili e indipendenti, la probabilità dell'evento prodotto è data semplicemente dal prodotto delle singole probabilità:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Tornando all'esempio proposto, calcolare la probabilità che entrambe le carte siano di Spade equivale a determinare la probabilità dell'intersezione $E_1 \cap E_2$. Applicando il teorema per eventi dipendenti, otteniamo:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} = \frac{9}{156}$$

Problema delle prove ripetute (Schema di Bernoulli) Consideriamo ora una sequenza di prove indipendenti, ognuna delle quali associata a un medesimo evento E ripetibile. In ogni singola prova, l'esito possibile è dicotomico: l'evento si verifica (successo) oppure l'evento non si verifica (insuccesso).

Esempio 15. *Lanciamo sei volte un dado regolare a sei facce. Qual è la probabilità che la faccia "2" si presenti esattamente una volta?*

Sia E l'evento "esce la faccia 2". La probabilità del successo è $P(E) = \frac{1}{6}$, mentre la probabilità dell'insuccesso (evento contrario) è $P(E^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Inizialmente, valutiamo la probabilità che il successo si verifichi in una posizione specifica, ad esempio al primo lancio, e che nei restanti cinque lanci si verifichino solo insuccessi. Trattandosi di prove indipendenti, la probabilità di questa singola sequenza è data dal prodotto delle probabilità dei singoli esiti:

$$P(\text{successo al } 1^\circ \text{ lancio}) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{5^5}{6^6}$$

Tuttavia, l'evento "il numero 2 esce una sola volta" non specifica in quale lancio debba avvenire il successo. Esso può verificarsi al primo, al secondo, o in uno qualunque dei sei lanci effettuati. Definiamo E_i come l'evento "il successo si verifica solo all'i-esimo lancio" (con $i = 1, \ldots, 6$). Poiché tali eventi sono mutuamente incompatibili, la probabilità della loro unione è la somma delle singole probabilità:

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_6) = 6 \cdot \frac{5^5}{6^6}$$

Osserviamo che il fattore 6 rappresenta il numero di sequenze distinte che contengono esattamente un successo. Questo valore può essere interpretato combinatoriamente come il numero di modi in cui un elemento può occupare sei posizioni disponibili, ovvero:

$$\binom{6}{1} = 6$$

Generalizzando questo ragionamento al caso di n prove indipendenti con k successi, otteniamo la formalizzazione dello schema di Bernoulli.

Teorema 2.2.8 (Teorema di Bernoulli o delle prove ripetute)**.** *Dato un esperimento aleatorio ripetuto n volte, in cui ogni prova è indipendente dalle precedenti e ha una probabilità costante di successo p e di insuccesso $q = 1 - p$, la probabilità $P_{n,k}$ di ottenere esattamente k successi su n prove è data da:*

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

2.2.4 Probabilità totale

Dopo aver analizzato come la probabilità di un evento possa essere condizionata dal verificarsi di un altro, studiamo ora come calcolare la probabilità di un evento che può realizzarsi attraverso diverse modalità alternative.

Esempio 16. *Un'azienda riceve componenti elettronici da due diversi fornitori: il fornitore F_1 fornisce il 60% dei pezzi, mentre il fornitore F_2 il restante 40%. Si sa che il tasso di difettosità di F_1 è del 5%, mentre quello di F_2 è del 10%. Qual è la probabilità che un componente scelto a caso sia difettoso?*

In questo scenario, l'evento D ("il componente è difettoso") può verificarsi in due casi distinti e incompatibili: il pezzo proviene da F_1 ed è difettoso, oppure proviene da F_2 ed è difettoso. Possiamo quindi scrivere l'evento D come l'unione di due intersezioni:

$$D = (D \cap F_1) \cup (D \cap F_2)$$

Poiché i due fornitori costituiscono una partizione dell'insieme delle forniture (un pezzo non può provenire contemporaneamente da entrambi), la probabilità di D sarà la somma delle probabilità di queste due intersezioni. Applicando il teorema della probabilità composta visto in precedenza, otteniamo:

$$P(D) = P(F_1) \cdot P(D|F_1) + P(F_2) \cdot P(D|F_2)$$

Sostituendo i valori dell'esempio:

$$P(D) = (0,60 \cdot 0,05) + (0,40 \cdot 0,10) = 0,03 + 0,04 = 0,07$$

Dunque, la probabilità totale che un componente sia difettoso è del 7%. Generalizzando questo ragionamento, enunciamo il seguente teorema:

Teorema 2.2.9 (Teorema della probabilità totale generalizzato)**.** *Sia $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una partizione dello spazio campionario $\mathcal{U}$ (ovvero eventi a due a due incompatibili*

la cui unione è $\mathcal{U}$). Per un qualunque evento E, la sua probabilità è data dalla somma dei prodotti delle probabilità di ciascun evento della partizione per la probabilità condizionata di E rispetto ad esso:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(E|A_i).$$

Capitolo 3

Quadro teorico

Il presente capitolo delinea il quadro teorico su cui si innesta l'intera sperimentazione. Verranno esaminati il contributo della prospettiva di Vygotskij e i fondamenti della metodologia del Laboratorio di Matematica, analizzando come tali teorie supportino i processi di costruzione della conoscenza e l'interazione sociale all'interno del contesto classe.

3.1 La prospettiva di Vygotskij

Le ricerche di Vygotskij (1934), supportate dai più recenti contributi della psicologia cognitivista, hanno ampiamente dimostrato come una cooperazione efficace costituisca la base imprescindibile dello sviluppo individuale. Secondo questa prospettiva, i processi cognitivi non emergono isolatamente, ma si attivano nel momento in cui il soggetto interagisce con le persone del proprio ambiente; è proprio la cooperazione con i pari a indurre lo studente a riflettere e ad autoregolare il proprio comportamento.

Questo processo di interiorizzazione è costantemente stimolato dalla possibilità di riflettere sulle proprie azioni, di confrontarsi con gli altri, di chiarire le proprie posizioni difendendole dalle obiezioni e di sforzarsi di spiegare i propri ragionamenti affinché risultino comprensibili agli interlocutori. Come affermato magistralmente

in Pensiero e linguaggio (1934), "l'apprendimento umano presuppone una natura sociale specifica e un processo attraverso il quale i bambini si inseriscono gradualmente nella vita intellettuale di coloro che li circondano". Ne consegue che la competenza nasce dapprima come dimensione sociale per poi evolversi in competenza individuale: lo sviluppo cognitivo è dunque il risultato di un apprendimento sociale, senza il quale non potrebbe aver luogo.

Superando le vecchie convinzioni che vedevano nella concretezza l'unico metodo d'insegnamento — escludendo tutto ciò che fosse associato al pensiero astratto — la prospettiva vygotskijana chiarisce che la competenza si sviluppa in maniera proporzionale al grado di riflessione e consapevolezza di ciò che si sta compiendo. Pertanto, l'istituzione scolastica non può e non deve limitarsi al semplice "fare", ma ha il compito di guidare gli studenti a riflettere sulle proprie attività tramite una didattica metacognitiva. In tal senso, la concretezza deve essere considerata solo un punto di partenza necessario per sviluppare il pensiero astratto.

È fondamentale, infine, considerare che un "buon apprendimento" è quello sempre in anticipo rispetto allo sviluppo individuale, poiché si colloca strategicamente nella Zona di Sviluppo Prossimale (ZSP). In quest'area, lo studente è chiamato ad affrontare sfide cognitive che stimolano la ricerca, la motivazione e l'impegno, permettendogli di superare il proprio livello di competenza attuale grazie al supporto sociale.

3.1.1 Il primo elemento della teoria vygotskijana : il clima positivo

Un pilastro fondamentale della pratica vygotskijana è la creazione di un contesto relazionale che favorisca l'apprendimento. Gli studenti, infatti, necessitano di vivere esperienze di successo ripetute e positive, sentendosi coinvolti in modo attivo e collaborativo (Chiari, 1994). In tale ottica, l'atteggiamento del docente — o del ricercatore in fase di sperimentazione — diviene la variabile determinante per la qua-

lità del clima di classe, inteso come l'insieme degli atteggiamenti, dei comportamenti e delle relazioni che si instaurano in quel contesto.

Storicamente, il superamento del modello di insegnamento autoritario, caratterizzato da una gestione unilaterale di obiettivi e procedure, ha portato spesso all'estremo opposto, ovvero a un modello permissivo che delega interamente alla classe le scelte didattiche, rischiando di generare disorientamento. La prospettiva qui adottata si rifà invece al modello di insegnante democratico: colui che pone in discussione e concorda con gli allievi sia le mete che i percorsi, mirando al consenso e all'impegno responsabile di ciascuno (Lewin, 1936).

A seconda dell'approccio adottato, si possono delineare tre tipologie di clima scolastico: individualistico-rinunciatario, competitivo-aggressivo e democratico-cooperativo.



Figura 3.1: Rappresentazione ideale dei tre principali climi che si possono trovare all'interno della scuola e della classe. (Miato)

È importante sottolineare che queste tre dimensioni coesistono naturalmente nella realtà scolastica e in ogni individuo. Tuttavia, in una gestione equilibrata dei tempi e delle relazioni, il clima cooperativo dovrebbe agire come cornice prevalente. Riprendendo l'immagine proposta da Miato, possiamo immaginare una "distribuzione a funghi" in cui la dimensione cooperativa (rappresentanto dal fungo

più grosso) sovrasta, senza annullarle, le altre due (rappresentati dai funghi più piccoli).

In termini di ripartizione del tempo scolastico, una distribuzione ideale che miri a massimizzare l'inclusione e il raggiungimento degli obiettivi nella Zona di Sviluppo Prossimale potrebbe essere così schematizzata:

- 50% **Tempo Cooperativo:** dedicato al lavoro di gruppo, al laboratorio e al confronto tra pari;
- 30% **Tempo Individuale:** necessario per la riflessione personale e l'interiorizzazione dei concetti;
- 20% **Tempo Competitivo:** inteso come sfida ludica per stimolare la motivazione e il confronto critico.

3.1.2 Il secondo elemento della teoria vygotskijana: l'apprendimento socializzato nell'area di sviluppo prossimale

Il cuore della teoria vygotskijana risiede nella concezione dello studente come protagonista attivo e responsabile della propria crescita cognitiva. Un apprendimento è definito significativo quando nasce dall'elaborazione attiva delle informazioni e dal confronto critico con una pluralità di fonti; tale complessità viene gestita con maggiore efficacia se il soggetto non è isolato, ma inserito in un gruppo di appartenenza volto al raggiungimento di obiettivi comuni.

Questo approccio trova il suo fondamento nel concetto di Zona di Sviluppo Prossimale (ZSP), definita da Vygotskij come la distanza tra il "livello effettivo di sviluppo" — ovvero le funzioni già maturate che permettono un problem-solving autonomo (Area A) — e il "livello di sviluppo potenziale" (Area B), raggiungibile solo attraverso la collaborazione con un adulto o con pari più capaci. Mentre l'Area

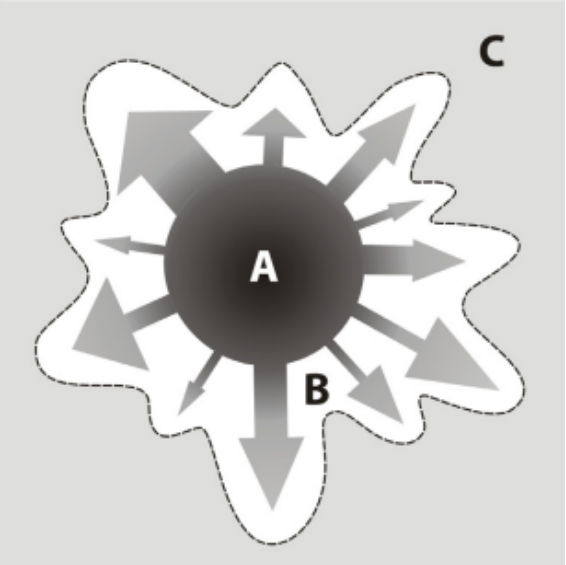


Figura 3.2: Rappresentazione schematica delle tre aree dello sviluppo apprenditivo (A = Area della competenza individuale; B = Area dello sviluppo prossimale della competenza individuale; C = Area della non conoscenza o della non competenza). (Miato)

A rappresenta la competenza individuale già acquisita, la ZSP identifica funzioni non ancora mature, ma in fase di maturazione (Vygotskij, 1934).

Secondo questa visione, l'azione didattica deve spostarsi da ciò che lo studente sa già fare a ciò che potrebbe fare se supportato. Collocare la proposta formativa nell'Area A risulterebbe demotivante per l'assenza di sfida, mentre situarla nell'area dell'incompetenza totale (Area C) genererebbe frustrazione e senso di autosvalutazione.

In sintesi, l'apprendimento socializzato nella ZSP permette di trasformare il contesto classe in un ambiente favorevole, capace di gestire l'ansia da prestazione e di convertire l'errore sistematico in un'occasione di costruzione collettiva della conoscenza.

3.1.3 Terzo elemento della teoria vygotskijana: lo sviluppo della metacognizione

Nel modello vygotskijano, lo sviluppo delle abilità metacognitive rappresenta il meccanismo fondamentale per l'interiorizzazione della conoscenza socializzata. La metacognizione può essere definita come un livello superiore dell'intelligenza che controlla e guida i processi cognitivi sottostanti, guadagnando in efficienza proprio attraverso l'interazione sociale.

Secondo Brown (1987) e Flavell (1976), il costrutto metacognitivo si articola in due dimensioni principali: la conoscenza del proprio funzionamento cognitivo (e di quello altrui) e i meccanismi di regolazione e controllo. Questi ultimi si riferiscono alle attività che permettono di guidare l'apprendimento durante la risoluzione di problemi. Coerentemente con la legge dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori (Vygotskij, 1934), tali meccanismi evolvono dall'esterno all'interno, ovvero dall'eteroregolazione (guidata dall'esperto o dai pari) all'autoregolazione autonoma. L'apprendimento consiste, dunque, nel prendere progressivamente consapevolezza di questi processi esterni per trasferirli nel proprio controllo interno.

Ai fini del processo di interiorizzazione, si possono distinguere diverse abilità metacognitive di regolazione:

- **Consapevolezza del funzionamento cognitivo proprio e generale:** la capacità di riflettere in tempo reale sui propri processi cognitivi;
- **Previsione:** l'individuazione di un problema e la stima della propria capacità di risolverlo in base alle conoscenze pregresse;
- **Pianificazione:** la progettazione delle strategie e delle fasi necessarie per raggiungere un obiettivo;
- **Monitoraggio:** il controllo costante dell'azione intrapresa, utile a testare e rimaneggiare le strategie durante lo svolgimento del compito;

- **Revisione metacognitiva:** a capacità di ripercorrere i passi compiuti per valutare l'efficacia delle alternative percorse (metodologia del debriefing);
- **Valutazione:** l'attribuzione di valore ai risultati raggiunti e all'impegno profuso in relazione agli scopi prefissati;
- **Astrazione e trasferimento:** la capacità di generalizzare una strategia appresa per applicarla in contesti nuovi.

Quest'ultimo punto, l'astrazione, rappresenta un indicatore cruciale del potenziale apprenditivo. Il trasferimento può essere classificato come *laterale o verticale* (Gagné, 1970), a seconda che l'abilità venga applicata in ambiti simili o in contesti di complessità superiore, e come *vicino o lontano* (Campione e Brown, 1987), in base alla distanza percepita tra la situazione di apprendimento originaria e il nuovo scenario d'uso.

3.1.4 Quarto elemento della teoria vygotskijana: lo sviluppo delle competenze individuali

Come precedentemente analizzato, l'interiorizzazione graduale delle attività socializzate — facilitate dalla guida di esperti o dall'interazione tra pari — conduce, attraverso la mediazione della consapevolezza metacognitiva, allo sviluppo delle competenze individuali (Vygotskij, 1934). In questo processo, la qualità della mediazione all'interno dei gruppi di apprendimento assume un ruolo strategico: permette al soggetto non solo di appropriarsi delle conoscenze, ma di rinforzare la capacità di trasferire e generalizzare le strategie acquisite in contesti nuovi. Quando lo studente impara a valutare criticamente i propri percorsi di risoluzione, accede a un apprendimento di secondo livello (metacognitivo) che consolida competenze di ordine superiore e garantisce risultati più duraturi.

Oltre alla dimensione cognitiva, la teoria vygotskijana e le sue evoluzioni metodologiche pongono l'accento sulla dimensione sociale del riconoscimento. Il riconoscimento pubblico delle competenze acquisite è, infatti, un elemento fondamentale per

la valorizzazione dell'alunno e per il consolidamento della sua autostima. Tuttavia, affinché tale gratificazione sia efficace e non controproducente, essa deve poggiare su dati di fatto precisi e verificabili.

A tal proposito, Elizabeth Cohen sottolinea tre caratteristiche imprescindibili che richiedono un'attenta osservazione da parte del docente e che l'accertamento valutativo delle competenze deve possedere per essere pedagogicamente efficace:

- le valutazioni devono essere note e condivise nel contesto sociale della classe;
- il riconoscimento deve riguardare abilità ben definite e non qualità astratte;
- le capacità messe in campo, specialmente nel caso di studenti con difficoltà, devono essere evidenziate in relazione al contributo concreto fornito al lavoro del gruppo.

In ultima analisi, la costruzione della competenza individuale non è un atto isolato, ma il coronamento di un percorso che vede nel successo condiviso e nella validazione sociale i suoi motori principali.

3.2 Laboratorio di Matematica

In accordo con le linee guida espresse nel documento "Matematica 2003 - La Matematica per il cittadino", il Laboratorio di Matematica non deve essere inteso come un luogo fisico necessariamente distinto dall'aula, bensì come un insieme strutturato di attività finalizzate alla costruzione di significati degli oggetti matematici. In quest'ottica, il laboratorio si configura come un sistema complesso che coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (organizzazione di spazi, tempi e strumenti) e idee (progetti didattici e percorsi di sperimentazione). "L'ambiente del Laboratorio di Matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti."

La costruzione di significati all'interno del laboratorio è strettamente interconnessa, da un lato, all'uso di strumenti specifici e, dall'altro, alle dinamiche interpersonali che si sviluppano durante l'attività. È fondamentale considerare che ogni strumento è il prodotto di un'evoluzione culturale, progettato per scopi precisi e portatore di idee intrinseche. Sul piano didattico, ciò implica che il significato matematico non risieda esclusivamente nello strumento, né possa emergere dalla mera interazione solitaria tra lo studente e l'oggetto. Al contrario, il senso profondo scaturisce dagli scopi per i quali lo strumento viene impiegato e dai piani d'azione elaborati per il suo utilizzo; l'appropriazione definitiva del significato richiede, infine, una riflessione individuale e consapevole sugli oggetti di studio e sulle attività proposte.

3.2.1 Gli strumenti del Laboratorio di Matematica

All'interno dell'ambiente laboratoriale, gli strumenti non sono semplici ausili didattici, ma veri e propri "mediatori" che incorporano idee matematiche. Essi possono essere di natura tradizionale o tecnologicamente avanzata, ognuno capace di attivare processi cognitivi differenti.

- **Materiali "poveri":** L'utilizzo di supporti fisici semplici — come fogli trasparenti, spilli o la piegatura della carta — costituisce un avvio significativo e tattile allo studio di concetti complessi, come le isometrie, permettendo di esplorare le proprietà geometriche attraverso il movimento diretto.

- **Macchine matematiche:** La manipolazione di meccanismi fisici (ad esempio i tracciatori di curve) induce modalità di costruzione del significato che sono spesso più ricche di quelle puramente digitali. La macchina "obbliga" il pensiero a seguire una legge geometrica tangibile.

- **Software di Geometria:** Intesi come veri e propri "micromondi", permettono allo studente di formulare congetture e validarle in tempo reale. In

questo contesto, la dimostrazione non è più percepita come un obbligo scolastico, ma come la necessità di giustificare teoricamente una proprietà osservata sperimentalmente.

- **Sistemi di Computer Algebra (CAS) e Programmazione:** Software di manipolazione simbolica e linguaggi di programmazione offrono ambienti integrati (numerici, grafici e testuali) che aiutano a pianificare attività volte al conseguimento di significati astratti. Tali strumenti sono fondamentali per modellizzare fenomeni complessi e per il passaggio dal linguaggio naturale a quello formalizzato.

- **Fogli elettronici:** Pur non essendo nati per la didattica, risultano preziosi per la rappresentazione e l'analisi statistica dei dati. La loro ampia diffusione nel mondo lavorativo li rende, inoltre, uno strumento essenziale per lo sviluppo di competenze trasversali e di cittadinanza.

- **Calcolatrici grafico-simboliche:** Queste racchiudono le potenzialità dei software sopra citati in un dispositivo tascabile, garantendo flessibilità logistica e permettendo di trasformare la classe stessa in un laboratorio senza i vincoli temporali legati al trasferimento in aule speciali.

Oltre agli strumenti materiali, la Storia della matematica si configura come un efficace strumento metodologico. Essa non va intesa solo come contenuto nozionistico, ma come chiave per motivare l'apprendimento, mostrando l'evoluzione dei concetti e i contesti epistemologici in cui sono nati.

In ultima analisi, la costruzione di significati nel laboratorio è indissociabile dalla comunicazione e condivisione. L'interazione sociale — declinata sia nel lavoro cooperativo in piccoli gruppi, sia nella "discussione matematica" orchestrata dal docente — permette di validare le scoperte individuali e di trasformarle in sapere collettivo e formalizzato.

3.2.2 Indicazioni metodologiche

Esiste spesso il pregiudizio secondo cui l'istruzione superiore debba essere caratterizzata esclusivamente da modalità didattiche tradizionali. Tuttavia, come sottolineato nelle linee guida dell'UMI, se la proposta matematica è inserita in un clima stimolante e coinvolgente, essa diventa l'occasione privilegiata per l'introduzione e lo studio di nuovi significati matematici. Sebbene la lezione frontale rimanga una scelta metodologica valida per garantire la copertura del programma e lo sviluppo di competenze autonome, essa deve essere necessariamente affiancata da approcci che favoriscano la costruzione sociale del sapere.

In quest'ottica, l'insegnamento per problemi si configura come un approccio fondamentale. Tale metodologia non si esaurisce nella mera richiesta di un risultato numerico tramite calcoli ripetitivi, ma consiste nel porre gli studenti di fronte a situazioni problematiche complesse e di ampia natura. È essenziale distinguere tra:

- **Risolvere problemi:** la capacità di affrontare sfide formulate da altri, singolarmente o in gruppo, attivando strategie risolutive originali;
- **Porsi problemi (problem posing):** l'acquisizione dell'abitudine critica a interrogarsi sulla matematica e sul mondo. Questa competenza è alla base della formazione di un cittadino consapevole, capace di dominare le tecniche matematiche senza esserne dominato.

Il lavoro in piccoli gruppi rappresenta la dimensione operativa di questo approccio. L'insegnante, agendo come regista della didattica, può strutturare i gruppi secondo criteri di omogeneità o eterogeneità a seconda degli obiettivi prefissati, mediando tra due modalità principali:

- **Apprendimento collaborativo (collaborative learning):** in cui il gruppo lavora congiuntamente su un problema, costruendo il sapere attraverso la discussione continua;

- **Apprendimento cooperativo (cooperative learning):** dove il gruppo affronta problemi complessi attraverso una suddivisione rigorosa di compiti e ruoli ben definiti, finalizzata al raggiungimento di un obiettivo comune.

Accanto alla dimensione di gruppo, risulta fondamentale la discussione matematica. Questa pratica metodologica deve permeare ogni fase dell'attività didattica e deve essere caratterizzata da: la verbalizzazione dei processi mentali, la produzione e la verifica di ipotesi argomentate. L'insegnante guida il confronto collettivo senza imporre soluzioni precostituite.

L'obiettivo finale non è dunque il semplice raggiungimento di abilità tecniche, ma lo sviluppo di un pensiero critico e riflessivo, dove l'errore o la difficoltà non sono ostacoli, ma momenti cruciali per la ristrutturazione dei concetti matematici.

3.3 Misconcezioni: dal conflitto alla conoscenza

L'integrazione delle prospettive finora analizzate — la teoria vygotskijana e la metodologia laboratoriale — si configura come una risposta pedagogica strutturata al problema delle misconcezioni. Come si è osservato, la teoria di Vygotskij trova nel Laboratorio di Matematica la sua naturale applicazione: l'interazione sociale all'interno del gruppo, supportata da un clima positivo e democratico, non solo riduce l'ansia da prestazione, ma agisce come catalizzatore per l'apprendimento significativo.

In quest'ottica, l'ambiente laboratoriale diviene lo spazio privilegiato per far emergere e discutere le misconcezioni degli studenti. Quando un allievo si confronta con una situazione problematica all'interno della propria Zona di Sviluppo Prossimale (ZSP), le sue intuizioni ingenue possono entrare in conflitto con i dati empirici o con le argomentazioni dei compagni. Tale "conflitto cognitivo", lungi dall'essere un ostacolo, rappresenta il punto di partenza per il superamento dell'errore.

Attraverso la discussione matematica e il supporto dei mediatori (siano essi materiali poveri o software come Python), le misconcezioni vengono esplicitate, analiz-

zate e progressivamente ristrutturate. Il laboratorio permette dunque di trasformare l'errore da semplice mancanza di abilità a oggetto di riflessione collettiva, facilitando quel processo di interiorizzazione che trasforma una conoscenza socializzata in una competenza individuale solida e consapevole.

In quest'ottica, l'ambiente laboratoriale diviene lo spazio privilegiato per far emergere e discutere le misconcezioni degli studenti. Quando un allievo si confronta con una situazione problematica, le sue intuizioni ingenue possono entrare in conflitto con i dati empirici o con le argomentazioni dei compagni. Tale "conflitto cognitivo" non è un elemento negativo, ma rappresenta il punto di partenza necessario per la decostruzione del misconcetto e la successiva ristrutturazione dei significati matematici.

3.3.1 La discussione collettiva come strumento di emersione dell'errore

All'interno del laboratorio, la discussione tra pari e con l'insegnante diventa lo strumento metodologico principale per affrontare le misconcezioni. Invece di una correzione immediata e unidirezionale, il clima laboratoriale favorisce l'esplicitazione dei processi mentali: gli studenti sono incoraggiati a verbalizzare i propri ragionamenti, rendendo "visibili" quegli ostacoli cognitivi che spesso rimangono nascosti nella didattica tradizionale.

Attraverso il confronto sociale e la validazione delle ipotesi, le misconcezioni vengono messe alla prova. Questo processo permette alla classe di trasformare l'errore sistematico in un oggetto di indagine: discutere del "perché" un'intuizione sia fallace permette al singolo studente di interiorizzare una nuova strategia corretta, trasformando un momento di crisi conoscitiva in un'acquisizione di competenza individuale solida e consapevole.

Capitolo 4

Intervento didattico

4.1 Obiettivi disciplinari e conoscenze

La definizione degli obiettivi qui delineati è stata formulata in stretta coerenza con le Indicazioni Nazionali per i Licei - adottate con Decreto Ministeriale del 7 ottobre 2010, n. 211 - le quali sottolineano l'importanza di sviluppare nel discente la capacità di utilizzare il linguaggio matematico come strumento elettivo per descrivere relazioni, strutture e modelli, anche in contesti non immediatamente formalizzabili.

La proposta didattica si inserisce nel nucleo tematico "Dati e previsioni", orientandosi verso lo sviluppo di obiettivi disciplinari che mirano a rafforzare la padronanza degli strumenti matematici in situazioni d'incertezza. Attraverso l'attività laboratoriale, gli studenti sono stati guidati all'analisi e alla costruzione di modelli matematici intesi come rappresentazioni significative e critiche della realtà.

Un obiettivo cardine del percorso è il potenziamento delle competenze di *problem solving*. Gli allievi sono chiamati ad affrontare situazioni problematiche attraverso la selezione di strategie risolutive adeguate, la valutazione della loro efficacia e il confronto tra soluzioni alternative. In questo senso, l'attività promuove la capacità di interpretare criticamente i risultati ottenuti e di validare le nuove strategie emerse dal confronto tra pari.

In linea con le direttive ministeriali, il percorso promuove un utilizzo consapevole

delle tecnologie e degli strumenti informatici. Nel contesto di questa sperimentazione, l'uso di Python non è inteso come sostitutivo del pensiero critico, ma come un supporto funzionale al consolidamento dei processi di esplorazione, rappresentazione e verifica sperimentale dei concetti teorici.

Un ulteriore obiettivo fondamentale riguarda lo sviluppo delle capacità argomentative: gli studenti sono stimolati a giustificare rigorosamente i procedimenti adottati e le scelte effettuate. La discussione, dapprima all'interno del proprio gruppo di lavoro e successivamente in sessione plenaria con il gruppo classe, favorisce l'acquisizione di un lessico matematico appropriato e la costruzione di spiegazioni coerenti, motivate e strutturate.

In termini di conoscenze, al termine dell'attività gli studenti avranno acquisito e consolidato i seguenti nuclei concettuali:

- Definizione classica di Probabilità e suoi limiti applicativi.
- Elementi di base del Calcolo combinatorio come strumento per il conteggio dei casi possibili e favorevoli.
- Relazioni logiche e insiemistiche tra eventi: eventi dipendenti e indipendenti, compatibili e incompatibili, eventi esaustivi.
- Teoremi fondamentali della probabilità: teorema della probabilità totale, teorema della probabilità composta e concetto di probabilità condizionata.
- Analisi dell'evento complementare (evento contrario) come strategia risolutiva semplificativa.

4.1.1 Obiettivi trasversali e di educazione civica

In linea con le recenti *Linee guida per l'insegnamento dell'Educazione Civica* del 2024 emanate dal Ministero dell'Istruzione e del Merito, la presente attività si prefigge di integrare la dimensione disciplinare con lo sviluppo di competenze trasversali di cittadinanza. Un obiettivo primario risiede nella promozione della cittadinanza

digitale, intesa non solo come abilità tecnica nell'utilizzo di linguaggi di programmazione come Python, ma come capacità di analisi critica e consapevolezza nell'uso delle tecnologie per la risoluzione di problemi complessi.

L'approccio probabilistico, inoltre, funge da strumento di educazione al pensiero critico, fornendo agli studenti i mezzi necessari per interpretare correttamente dati e informazioni, valutare l'incertezza e riconoscere i meccanismi matematici sottesi a fenomeni reali, quali il gioco d'azzardo e le scommesse. Tale consapevolezza è fondamentale per la formazione di cittadini capaci di assumere decisioni responsabili e di comprendere la portata etica e sociale delle leggi del caso.

Infine, la metodologia laboratoriale favorisce la cooperazione e la responsabilità sociale: attraverso il lavoro di gruppo e il confronto in plenaria, gli studenti sono stimolati a rispettare il punto di vista altrui, a collaborare per un obiettivo comune e a esercitare il dialogo democratico, elementi cardine per lo sviluppo di una coscienza civile matura e partecipativa.

4.2 Struttura dell'attività sperimentale

L'intervento didattico è stato articolato in tre incontri, per un totale di quattro ore complessive. In questa sezione verrà analizzato nel dettaglio il percorso proposto, motivando le scelte metodologiche e i contenuti selezionati per ciascuna fase.

4.2.1 Primo incontro

Il primo incontro, svoltosi il 12 marzo 2026, è stato dedicato alla somministrazione di un pre-test diagnostico. I quesiti sono stati selezionati dalle ultime tre edizioni delle Etniadi di Matematica (2023, 2024 e 2025), al fine di mappare le competenze in ingresso e identificare la persistenza di eventuali misconcezioni. Nello specifico, la scelta è ricaduta sui seguenti problemi:

- **Quesito 3 (2023):** Selezionato per la sua natura introduttiva. Non avendo rappresentato una criticità statistica nell'edizione di riferimento, esso permet-

te agli studenti di approcciarsi alla prova con maggiore sicurezza, richiedendo l'applicazione della definizione classica di Probabilità e nozioni basilari di Calcolo combinatorio.

- **Quesito 7 (2024) e Quesito 5 (2025):** Caratterizzati da un elevato coefficiente di difficoltà nelle rispettive edizioni. Questi problemi sono stati scelti poiché inducono frequentemente errori concettuali legati alla gestione di eventi composti, condizionati e incompatibili. L'obiettivo è valutare se tali difficoltà si manifestino anche nel campione in esame, fornendo al contempo lo spunto per introdurre concetti probabilistici non banali.

Di seguito si riportano i testi dei quesiti e le relative risoluzioni commentate.

Quesito 3 - Edizione 2023. *Disponendo in modo del tutto casuale le cifre da 1 a 9, prese ciascuna una sola volta, qual è la probabilità che il numero di nove cifre ottenuto sia divisibile per 6?*

Svolgimento: Sia E l'evento "il numero ottenuto è divisibile per 6". Il numero totale di permutazioni delle nove cifre distinte (casi possibili) è pari a 9!. Affinché un numero sia divisibile per 6, esso deve essere contemporaneamente divisibile per 2 e per 3. Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3. Nel caso in esame, la somma delle cifre da 1 a 9 è 45; essendo 45 un multiplo di 3, ogni numero ottenibile è sempre divisibile per 3. Il numero deve essere pari, ovvero terminare con una cifra appartenente all'insieme $\{2, 4, 6, 8\}$. Per calcolare i casi favorevoli, fissiamo una delle 4 cifre pari nell'ultima posizione; le restanti 8 cifre possono essere disposte in 8! modi. Pertanto, i casi favorevoli sono $4 \cdot 8!$. La probabilità dell'evento E è:

$$P(E) = \frac{4 \cdot 8!}{9!} = \frac{4 \cdot 8!}{9 \cdot 8!} = \frac{4}{9} \approx 44,44\%.$$

Quesito 7 - Edizione 2024. *Due urne contengono palline bianche e nere. La prima contiene 5 palline bianche e 10 nere; la seconda ne contiene 3 bianche e 7*

nere. Marco prende una pallina a caso dalla seconda urna e la mette nella prima e poi estrae a caso una pallina dalla prima urna. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

Svolgimento: Definiamo gli eventi: E_1 "estrazione di una pallina bianca dalla seconda urna"; E "estrazione di una pallina bianca dalla prima urna dopo il travaso". Le probabilità a priori dalla seconda urna sono $P(E_1) = \frac{3}{10}$ e $P(E_1^c) = \frac{7}{10}$. La composizione della prima urna dipende dall'esito della prima estrazione, configurando una situazione di dipendenz.

- Se si verifica E_1, la prima urna conterrà 6 bianche su 16 totali: $P(E|E_1) = \frac{6}{16}$.
- Se si verifica E_1^c, la prima urna conterrà 5 bianche su 16 totali: $P(E|E_1^c) = \frac{5}{16}$.

Applicando il Teorema della Probabilità Totale, si ottiene:

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_1^c) \cdot P(E|E_1^c) = \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{16}\right) + \left(\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{16}\right) =$$

$$= \frac{18+35}{160} = \frac{53}{160} \approx 33,13\%.$$

Quesito 5 - Edizione 2025. *Al palio di Siena la probabilità che vinca Pantera è data 1 contro 3 e la probabilità che vinca Valdimontone è data 1 contro 5. Qual è la probabilità che non vinca né Pantera né Valdimontone? (Nota: la probabilità "x contro y" è definita come $\frac{x}{x+y}$).*

Svolgimento: Consideriamo gli eventi E_1: "vittoria di Pantera" ed E_2: "vittoria di Valdimontone". Dalle definizioni fornite si ricava $P(E_1) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$ e $P(E_2) = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$. L'evento richiesto è "non vince E_1 e non vince E_2", ovvero l'intersezione dei complementari $E_1^c \cap E_2^c$.Poiché i due eventi sono incompatibili (può esserci un solo vincitore), per le leggi di De Morgan e il Teorema della probabilità dell'unione, abbiamo:

$$P(E_1^c \cap E_2^c) = P((E_1 \cup E_2)^c) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12} \approx 58,33\%.$$

Scheda guidata. Parallelamente alla somministrazione del pre-test, è stata fornita agli studenti una scheda guidata finalizzata a supportare il processo risolutivo. Tale strumento non è stato concepito come un mero formulario, bensì come un percorso di facilitazione semantica e procedurale, volto a guidare gli allievi nella decodifica dei testi e nella scelta delle strategie più idonee. Tale sussidio non è stato somministrato in modo indiscriminato, ma è stato consegnato esclusivamente agli studenti che ne hanno fatto esplicita richiesta dopo aver tentato una prima risoluzione in autonomia.

La scheda è stata strutturata secondo un approccio graduale, alternando brevi richiami teorici — necessari per formalizzare il linguaggio probabilistico — ad esempi semplificati che fungessero da analoghi per i quesiti delle Etniadi. Nello specifico, la guida ha focalizzato l'attenzione sui seguenti nuclei:

- **Analisi del testo:** supporto nell'individuazione dei dati e delle condizioni restrittive (es. la divisibilità o la composizione delle urne);
- **Modellizzazione:** stimoli volti a distinguere tra eventi semplici e composti, incentivando l'uso di diagrammi ad albero o tabelle a doppia entrata per visualizzare lo spazio campionario;
- **Riflessione metacognitiva:** brevi domande di controllo inserite tra i passaggi per indurre lo studente a verificare la coerenza delle proprie ipotesi prima di giungere al calcolo finale.

In conclusione, la scheda è stata concepita con una duplice finalità: da un lato, fornire agli studenti un supporto strutturato per orientarsi nella risoluzione dei quesiti; dall'altro, agire come uno strumento di indagine qualitativa, permettendomi di osservare ed analizzare l'evoluzione dei loro processi di ragionamento e la capacità di ristrutturazione cognitiva se opportunamente guidati. Per una visione della scheda guidata si rimanda alla sezione successiva.

4.2.2 Secondo incontro

Il secondo incontro, svoltosi in data 31 marzo 2026, è stato finalizzato all'introduzione dei nuclei fondanti della probabilità classica partendo dall'analisi critica dei primi due quesiti somministrati nel pre-test. L'attività è stata strutturata in tre fasi distinte, caratterizzate dall'impiego di diverse metodologie didattiche.

La prima parte dell'incontro è stata dedicata all'analisi del *Quesito 1* attraverso la metodologia del Laboratorio di Matematica. Gli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, sono stati chiamati ad affrontare il problema partendo da una situazione verosimile di vita quotidiana. Tale approccio ha permesso di introdurre i concetti fondamentali della probabilità in un contesto significativo, favorendo la co-costruzione della conoscenza e la discussione tra pari.

Il secondo momento dell'attività si è concentrato sul *Quesito 2* ed è stato condotto prevalentemente attraverso una lezione frontale partecipata, integrata da momenti esperienziali e tecnologici. In questa fase, il lavoro è stato svolto direttamente sul testo del pre-test, supportato da simulazioni dal vivo (estrazioni fisiche di palline da un'urna) e dall'ausilio di script in linguaggio *Python*. L'integrazione tra l'esperienza sensoriale e la simulazione computazionale ha permesso di formalizzare i concetti teorici attraverso esempi concreti, facilitando la visualizzazione della dipendenza tra eventi.

Infine, l'ultima parte dell'incontro è stata dedicata a una riflessione trasversale nell'ambito dell'Educazione Civica. È stato approfondito il legame tra la teoria della probabilità e il mondo delle scommesse, analizzando criticamente come le quote vengano strutturate dai gestori per porre il giocatore in una posizione di svantaggio matematico. Tale momento ha avuto l'obiettivo di promuovere il senso critico e la consapevolezza dei rischi legati al gioco d'azzardo (OILER, s.d.).

Per una consultazione dettagliata dei materiali utilizzati, si rimanda alla scheda didattica presentata nella sezione successiva.

4.2.3 Terzo incontro

Il terzo incontro è stato dedicato alla somministrazione di un test finale, strutturato per verificare il consolidamento delle conoscenze acquisite e la capacità di applicare i formalismi appresi durante il secondo intervento. La scelta dei quesiti è stata guidata da specifici criteri didattici. I **primi due quesiti** sono analoghi a quelli del pre-test. Questa scelta mira a valutare il processo di rielaborazione dei concetti di Calcolo combinatorio e Probabilità, osservando come gli studenti siano ora in grado di utilizzare strumenti formali (come il fattoriale o il teorema della probabilità totale) rispetto all'approccio intuitivo iniziale. Nel **secondo quesito** è stata inserita una "sezione bonus" che richiede l'applicazione del teorema della probabilità composta in un contesto di eventi dipendenti (estrazioni senza reinserimento). Sebbene il caso specifico non sia stato trattato esplicitamente, l'obiettivo è testare la capacità di astrazione e ragionamento logico degli studenti di fronte a varianti di problemi noti. Il **terzo quesito** coincide esattamente con quello del pre-test. È stato riproposto per osservare l'evoluzione del pensiero logico alla luce delle nuove competenze acquisite.

Quesito 1. *Considerando l'insieme di tutti i possibili anagrammi, anche privi di significato compiuto, della parola CONTABILE, qual è la probabilità che in uno di essi compaia la sequenza di lettere consecutive LATO?*

Svolgimento: Si definisca l'evento E come: «l'anagramma contiene la sequenza di lettere consecutive *LATO*». Poiché la parola *CONTABILE* è composta da $n = 9$ lettere distinte, lo spazio campionario (casi possibili) è dato dalle permutazioni di 9 elementi:

$$\text{Casi possibili} = 9!$$

Per determinare il numero di casi favorevoli, si ricorre alla strategia del "blocco unitario": le lettere $\{L, A, T, O\}$ vengono considerate come un unico elemento inscindibile. Di conseguenza, il problema si riduce a permutare tale blocco insieme alle restanti 5 lettere ($\{C, O, N, B, I\}$). Gli elementi totali da disporre sono quindi

$5 + 1 = 6$.

$$\text{Casi favorevoli} = 6!$$

La probabilità dell'evento E è dunque:

$$P(E) = \frac{6!}{9!} = \frac{6!}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{504}.$$

Quesito 2. *Siano date tre urne: nella prima ci sono 8 palline rosse e 7 verdi; nella seconda 11 rosse e 9 verdi; nella terza 2 rosse e 8 verdi. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina. Qual è la probabilità che la pallina sia rossa? Dopo aver reinserito la pallina nell'urna di provenienza, si estraggono in successione, senza reinserimento, due palline dalla prima urna e due palline dalla seconda urna. Qual è la probabilità che le quattro palline estratte siano tutte verdi?*

Svolgimento: Per la prima parte, si consideri E_i l'evento «viene scelta l'urna i-esima» ($i = 1, 2, 3$). Poiché la scelta dell'urna è equiprobabile, si ha $P(E_i) = \frac{1}{3}$. Sia R l'evento «estrazione di una pallina rossa». Applicando il teorema della probabilità totale, si ottiene:

$$P(R) = \sum_{i=1}^{3} P(E_i) \cdot P(R|E_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{15} + \frac{11}{20} + \frac{2}{10}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{32 + 33 + 12}{60}\right) = \frac{77}{180}$$

Per la seconda richiesta (parte bonus), si analizzano le estrazioni come eventi dipendenti. Sia V_{TOT} l'evento «tutte e quattro le palline sono verdi». Poiché le estrazioni tra la prima e la seconda urna sono indipendenti tra loro, ma dipendenti internamente (senza reinserimento), si ha:

$$P(V_{TOT}) = P(V_{1,1} \cap V_{1,2}) \cdot P(V_{2,1} \cap V_{2,2})$$

Dove $V_{i,j}$ indica la j-esima pallina verde dall'urna i.

$$P(V_{TOT}) = \left(\frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14}\right) \cdot \left(\frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{18}{95}\right) = \frac{18}{475}.$$

Quesito 3. *Al Palio di Siena la probabilità che vinca Pantera è data 1 contro 3 e la probabilità che vinca Valdimontone è data 1 contro 5. Qual è la probabilità che non vinca né Pantera né Valdimontone?*

Svolgimento: Si rimanda alla risoluzione dettagliata presentata nella sezione 4.2.1.

Questionario. A conclusione dell'incontro, è stato somministrato agli studenti un questionario di gradimento in forma anonima. Tale strumento non è finalizzato alla valutazione delle competenze acquisite, bensì a raccogliere feedback qualitativi sull'efficacia della metodologia didattica adottata (utilizzo di *Python*, attività laboratoriali e discussioni in plenaria). Di seguito si riportano le domande poste.

D1. A quali incontri hai partecipato?

- ☐ Pirmo incontro
- ☐ Secondo incontro
- ☐ Terzo incontro

D2. Prima dell'attività, avevi già conoscenze sulla probabilità?

- ☐ Sì
- ☐ No
- ☐ In parte

D3. In cosa hai incontrato difficoltà nella risoluzione dei quesiti del primo test?

_____

_____

D4. Quanto hai trovato interessante l'attività didattica proposta?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

D5. Le attività proposte al secondo incontro (giochi, simulazioni, lavoro di gruppo) ti hanno coinvolto? Perché?

D6. Quale parte dell'attività hai apprezzato maggiormente?

- ☐ Laboratorio in gruppo (quesito dell'azienda)
- ☐ Confronto e condivisione dei risultati in plenaria
- ☐ Estrazione da un'urna fisica
- ☐ Risoluzione del secondo quesito in plenaria
- ☐ Laboratorio su *Python*
- ☐ Contenuto teorico
- ☐ Probabilità e scommesse

D7. Perché?

D8. Quale, invece, hai apprezzato di meno? Perché?

D9. In che modo il lavoro di gruppo e il confronto con i compagni hanno influenzato la tua partecipazione e comprensione dell'attività?

D10. Hai trovato coerente il collegamento tra attività pratica e spiegazione teorica? Perché?

D11. Durante l'attività, ti sei sentito coinvolto e hai avuto la possibilità di esprimere le tue idee?

- ☐ Per niente
- ☐ Poco
- ☐ Abbastanza
- ☐ Molto

D12. Spiega brevemente la tua risposta.

D13. In che modo l'attività ti ha aiutato ad affrontare il test finale?

D14. Avevi già partecipato ad una lezione strutturata in questo modo?

- ☐ Sì
- ☐ No

D15. Ritieni che questa modalità di lavoro possa esserti utile per comprendere anche altri argomenti di Matematica? In caso affermativo, quali e perché?

4.3 Schede didattiche

In questa sezione si raccoglie la documentazione didattica integrale della sperimentazione. I materiali, strutturati per i tre incontri, documentano l'evoluzione del percorso: il pre-test (*Quesiti di Probabilità*) con le relative *Schede guidate* del primo incontro; la *Scheda dell'attività didattica* del secondo; il test finale (*Quesiti di Probabilità - test finale*) dell'ultimo incontro.

Quesiti di Probabilità

Nickname: _____

1. Disponendo in modo del tutto casuale le cifre da 1 a 9, prese ciascuna una sola volta, qual è la probabilità che il numero di nove cifre ottenuto sia divisibile per 6?

2. Due urne contengono palline bianche e nere. La prima contiene 5 palline bianche e 10 nere; la seconda ne contiene 3 bianche e 7 nere. Marco prende una pallina a caso dalla seconda urna e la mette nella prima e poi estrae a caso una pallina dalla prima urna. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

3. Al palio di Siena la probabilità che vinca Pantera è data 1 contro 3 e la probabilità che vinca Valdimontone è data 1 contro 5. Qual è la probabilità che non vinca né Pantera né Valdimontone? (*Dire che la vittoria di Tizio è data x contro y vuol dire che si attribuisce all'evento "Tizio vince" la probabilità* $\frac{x}{x+y}$*)*

Schede guidate per la risoluzione dei seguenti quesiti:

Quesito 1:

Disponendo in modo del tutto casuale le cifre da 1 a 9, prese ciascuna una sola volta, qual è la probabilità che il numero di nove cifre ottenuto sia divisibile per 6?

- Dati n oggetti distinti, il numero di modi in cui si possono disporre è
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$
- Es. Possiamo disporre 2 macchine (A1 e A2) in un parcheggio con due posti auto nel seguente modo:

A1	A2	oppure	A1	A2

cioè in $2! = 2 \cdot 1$ modi.
- Es. In quanti modi possiamo disporre 3 macchine in un parcheggio con 3 posti auto? (Continua tu)

A1	A2	A3	o	A3	A1	A2	o	A2	A3	A1	o	A1	…	…	o	…	A1	…	o	…	…	A1

Cioè $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ modi.
- Es. In quanti modi possiamo disporre 4 macchine in un parcheggio con 4 posti auto?

_____
- Es. In quanti modi 5 amici possono sedersi attorno a un tavolo con 5 sedie?

_____
- In quanti modi possiamo creare un numero di 9 cifre, con cifre da 1 a 9 ripetute una sola volta?

_____
- Cosa serve affinché un numero sia divisibile per 6? Scrivi gli eventuali criteri di divisibilità.

_____

_____
- Es. di numero di nove cifre, con cifre da 1 a 9 ripetute una sola volta, che è divisibile per 6?

_____
- Es. di numero di nove cifre, con cifre da 1 a 9 ripetute una sola volta, che non è divisibile per 6?

_____
- Cosa possiamo notare?

_____

_____
- Quale, tra le nove cifre del numero, è quella determinante? Quali e quante cifre da 1 a 9 possiamo scegliere affinché sia soddisfatta questa condizione?

_____

_____
- Quante sono le cifre rimanenti? In quanti modi possiamo disporle?

_____
- Quindi, quanti numeri di nove cifre, con cifre da 1 a 9 ripetute una sola volta, soddisfano i criteri di divisibilità per 6?

_____
- La probabilità che un evento E si verifichi è
$$P(E) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}$$
- Es. Qual è la probabilità che, lanciando un dado regolare a 6 facce, esca un numero pari?

_____

- Es. Qual è la probabilità di pescare l'Asso d'Oro scegliendo una carta a caso da un mazzo di carte siciliane di 40 carte?

_____

- Nel nostro quesito (1), quanti sono i casi possibili?

_____

- Quanti, invece, i casi favorevoli?

_____

- Qual è, allora, la probabilità che il numero di nove cifre ottenuto sia divisibile per 6?

_____

Quesito 2:

Due urne contengono palline bianche e nere. La prima contiene 5 palline bianche e 10 nere; la seconda ne contiene 3 bianche e 7 nere. Marco prende una pallina a caso dalla seconda urna e la mette nella prima e poi estrae a caso una pallina dalla prima urna. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

- Quante palline ci sono in totale nella prima urna? Quante nella seconda?

_____

- Chiamiamo B_1 l'evento: "Marco estrae una pallina bianca dalla seconda urna". Qual è la probabilità che si verifichi questo evento?

_____

- Dati due eventi *A* e *B* si dicono *indipendenti* se il verificarsi dell'uno non altera la probabilità dell'altro; in caso contrario si dicono *dipendenti*.

- Dati due eventi dipendenti A e B, si dice *probabilità condizionata* di B rispetto ad A e si indica con $P(B\backslash A)$, la probabilità assunta da B nel caso in cui A si sia verificato.

- Es. Lanciamo due volte una moneta e chiamiamo A_1 l'evento "al primo lancio esce testa" e A_2 l'evento "al secondo lancio esce croce". Sono eventi dipendenti o indipendenti? Perché?

_____

_____

- Es. Peschiamo una alla volta due carte da un mazzo di carte senza reinserirle nel mazzo e chiamiamo A_1 l'evento "la prima carta estratta è di Spade" e A_2 l'evento "la seconda carta estratta è di Bastoni". Sono eventi dipendenti o indipendenti? Perché?

_____

_____

- Torniamo al nostro quesito (2). Supponiamo che Marco abbia già preso una pallina dalla seconda urna e l'abbia inserita nella prima. Quante palline ci sono, adesso, nella prima urna?

_____

- Sia adesso A_1 l'evento "Marco estrae una pallina bianca dalla prima urna dopo averne aggiunta una dalla prima". Gli eventi A_1 e B_1 sono dipendenti o indipendenti? Perché?

_____

_____

- Supponendo che B_1 si sia verificato, qual è la probabilità che si verifichi A_1?

_____

- **Teorema della probabilità composta per eventi dipendenti.** Dati due eventi A e B compatibili (possono verificarsi insieme) e dipendenti, la probabilità dell'evento prodotto,

detta *probabilità composta,* è data dal prodotto della probabilità del primo evento per la probabilità condizionata del secondo rispetto al primo. Ovvero,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \backslash A).$$

- Es. In un'urna ci sono 5 palline rosse e 4 palline blu. Si estraggono due palline senza rimetterle nell'urna. Qual è la probabilità che entrambe siano rosse?

_____

_____

_____

- Nel nostro caso, qual è la probabilità che entrambe le palline siano bianche?

_____

- Sia adesso B_2 l'evento "Marco estrae una pallina nera dalla seconda urna". Qual è la probabilità che si verifichi questo evento?

_____

- Ricordiamo che A_1 è l'evento "Marco estrae una pallina bianca dalla prima urna dopo averne aggiunta una dalla prima". Gli eventi A_1 e B_2 sono dipendenti o indipendenti? Perché?

_____

_____

- Supponendo che B_2 si sia verificato, qual è la probabilità che si verifichi A_1?

_____

- Qual è, invece, la probabilità che la prima sia nera e la seconda bianca?

_____

- Due eventi *A* e *B* si dicono *incompatibili* se non possono verificarsi insieme; si dicono *esaustivi* se uno di essi deve verificarsi.

- Es. Consideriamo il lancio di un dado e siano A l'evento "esce 3" e B l'evento "esce 5". Tali eventi sono incompatibili? Sono esaustivi? Perché?

_____

_____

- Es. Consideriamo il lancio di un dado e siano A l'evento "esce un numero pari" e B l'evento "esce un numero dispari o maggiore di 5". Tali eventi sono incompatibili? Sono esaustivi? Perché?

_____

_____

- Nel nostro caso, gli eventi B_1 e B_2 sono incompatibili? Sono esaustivi? Perché?

_____

_____

- **Teorema della probabilità totale.** Siano A_1 e A_2 due eventi incompatibili ed esaustivi. Allora, per ogni evento B si ha

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \backslash A_1) + P(A_2) \cdot P(B \backslash A_2).$$

- Adesso, da quanti e quali casi dipende il nostro evento A_1?

_____

_____

- Quindi, qual è la probabilità che la pallina estratta dalla prima urna sia bianca?

_____

Quesito 3:

Al palio di Siena la probabilità che vinca Pantera è data 1 contro 3 e la probabilità che vinca Valdimontone è data 1 contro 5. Qual è la probabilità che non vinca né Pantera né Valdimontone? (Dire che la vittoria di Tizio è data x contro y vuol dire che si attribuisce all'evento "Tizio vince" la probabilità $\frac{x}{x+y}$)

- Sia P l'evento "vince Pantera" e sia V l'evento "vince Valdimontone". Qual è la probabilità che vinca Pantera? E Valdimontone?

  _____

- Sia A una proposizione, indichiamo con $\neg A$ la sua negazione. Ad esempio, la negazione di "Vado al cinema" è "NON vado al cinema". Qual è, allora, la negazione dell'evento P? E quella dell'evento V?

  _____

  _____

- A noi interessa che non vincano entrambe o basta che non vinca una delle due?

  _____

- Quindi, ci interessa l'intersezione delle negazioni o l'unione?

  _____

- Se P e Q sono due proposizioni, la negazione di $P \cap Q$ è $\neg(P \cup Q)$. Ad esempio, la negazione della proposizione "mangio il primo e il secondo" è "non mangio il primo o non mangio il secondo".

- Es. Qual è la negazione della proposizione "vado al cinema e in piscina"?

  _____

- Es. Qual è la negazione della proposizione "non bevo né latte né the"?

  _____

- Quindi, qual è la negazione della proposizione "non vince né Pantera né Valdimontone"?

  _____

- **Teorema.** Sia E un evento. Denotiamo con E^C la sua negazione. Si ha che
$$P(E^C) = 1 - P(E).$$

- **Teorema.** Se due eventi A e B sono incompatibili la probabilità della loro unione, detta *probabilità totale,* è data dalla somme delle rispettive probabilità. Ovvero,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Es. Nell'estrazione di un mazzo di 40 carte, consideriamo i due eventi: A = "la carta estratta è un sette" e B = "la carta estratta è un re". I due eventi sono incompatibili? Perché? Qual è l'evento unione? Con quale probabilità si verifica?

  _____

  _____

  _____

- Nel nostro caso, gli eventi P^C e V^C sono incompatibili? Perché? Qual è l'evento unione? Con quale probabilità si verifica?

  _____

  _____

  _____

- Quindi, qual è la probabilità che non vinca né Pantera né Valdimontone?

  _____

Attività didattica in classe

SCUOLA	Liceo Scientifico – Scienze applicate
CLASSE	Terza
TOPIC	Probabilità, Calcolo Combinatorio, Scommesse
DURATA	2 ore
CONOSCENZE PREGRESSE	➢ Abilità di calcolo e numeriche (padronanza delle operazioni con i numeri razionali, conoscenza delle proprietà delle potenze) ➢ Logica e insiemistica (conoscenza degli elementi di base della teoria degli insiemi, comprensione dei connettivi logici elementari) ➢ Fondamenti di informatica (concetti elementari di pensiero algoritmico, conoscenza basilare del linguaggio Python)
OBIETIVI DI APPRENDIMENTO	➢ Definizione e calcolo (acquisire il concetto di probabilità classica e saperlo applicare nel calcolo di casi favorevoli e possibili) ➢ Teoremi fondamentali (comprendere e utilizzare i teoremi della probabilità totale e composta, il concetto di probabilità condizionata e l'uso dell'evento complementare) ➢ Calcolo combinatorio (conoscere e saper applicare gli elementi base come strumenti di conteggio) ➢ Relazione tra eventi (distinguere e classificare eventi dipendenti, indipendenti, compatibili ed esaustivi)
ABILITÀ MATEMATICHE	➢ Modellizzazione: (saper trasporre problemi reali in modelli matematici formali) ➢ Problem Solving: (sviluppare strategie risolutive flessibili) ➢ Argomentazione: (saper giustificare i passaggi logici e matematici adottati, utilizzando un linguaggio specifico e coerente) ➢ Interpretazione dei dati: (capacità di analizzare i risultati ottenuti e di verificarne la coerenza statistica)
AREA DI COMPETENZA DEL PROFILO DELLO STUDENTE	➢ Competenza in scienze, tecnologie, ingegneria e matematica (stem); ➢ Competenza digitale; ➢ Competenza alfabetica funzionale; ➢ Competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare; ➢ Competenza in materia di cittadinanza.

Nota: la progettazione degli obiettivi, delle abilità e delle aree di competenza precedentemente illustrati è stata condotta seguendo un rigoroso allineamento con i quadri normativi nazionali ed europei. Nello specifico, gli obiettivi disciplinari e le abilità matematiche afferiscono alle *Indicazioni Nazionali per i Licei* (di cui al D.I. 211/2010), con particolare riferimento al nucleo tematico "Dati e previsioni", che individua nella modellizzazione probabilistica e nel calcolo combinatorio strumenti essenziali per la formazione scientifica dello studente. Le aree di competenza del profilo dello studente richiamano, invece, le *Competenze chiave per l'apprendimento permanente* definite nella Raccomandazione del Consiglio dell'Unione Europea del 22 maggio 2018. Infine, gli obiettivi trasversali e di cittadinanza sono stati declinati in conformità alle recenti *Linee guida per l'insegnamento dell'Educazione Civica* (MIM, 2024), che promuovono l'integrazione della cultura digitale e della consapevolezza critica nell'analisi dei fenomeni sociali e scientifici, favorendo lo sviluppo di una cittadinanza attiva e informata.

DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ:

Analisi del quesito 1 e introduzione alla probabilità: *(50 minuti)*

> ***Quesito 1:*** *Disponendo in modo del tutto casuale le cifre da 1 a 9, prese ciascuna una sola volta, qual è la probabilità che il numero di nove cifre ottenuto sia divisibile per 6?*

Laboratorio di Matematica:

Si propone alla classe il seguente quesito:

Tre amici — Antonio, Barbara e Clara — decidono di aprire insieme un'azienda. Dopo mesi di preparativi per avviare l'attività, devono prendere tre decisioni finali:

i. scegliere il nome dell'azienda, che deve essere formato dall'acronimo dei loro nomi;

ii. stabilire in quale ordine sedersi (in fila) durante i colloqui per i futuri dipendenti;

iii. decidere come parcheggiare le auto nel parcheggio dell'azienda, sapendo che sono disponibili 3 posti auto.

Poiché non hanno il tempo di discuterne tutti insieme, decidono che ciascuno si occuperà di analizzare una delle tre questioni; successivamente si riuniranno per scegliere le soluzioni migliori.

ATTIVITÀ: La classe viene quindi divisa in tre gruppi, ciascuno incaricato di analizzare una delle tre situazioni. L'obiettivo è costruire una scheda che elenchi tutte le possibili configurazioni. Quindi, il primo gruppo individua i possibili nomi dell'azienda disponendo sul tavolo tre fogli con le iniziali dei nomi; il secondo gruppo esplora i diversi modi di sedersi durante i colloqui attraverso prove concrete utilizzando tre sedie; il terzo gruppo analizza le possibili modalità di parcheggio posizionando tre macchinine su una piantina del parcheggio.

➔ MATERIALE: tre fogli con le iniziali dei nomi dei tre amici; tre sedie; tre macchinine; pianta del parcheggio con tre posti auto.

Si torna poi in plenaria per condividere e confrontare i risultati ottenuti.

Successivamente si propone una variante del quesito iniziale:

I tre amici decidono di coinvolgere nel progetto un quarto amico, Davide. Si ripropongono quindi le tre domande precedenti, ma considerando ora 4 persone (e 4 posti auto).

ATTIVITÀ: Gli studenti tornano nei gruppi precedenti e cercano di risolvere il nuovo problema, individuando tutte le possibili configurazioni. Le modalità e i materiali utilizzati restano gli stessi dell'attività precedente, adattati alla presenza di quattro amici.

Quindi, si torna in plenaria per condividere i nuovi risultati. Al termine della discussione, *l'insegnante* introduce il concetto di fattoriale, mettendo in evidenza il collegamento con le strategie di conteggio emerse nelle tre situazioni analizzate.

CONTENUTO TEORICO
Definizione. Dato un numero naturale n, si definisce fattoriale di n, indicato con $n!$, il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a n: $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \, .$$ Inoltre, si pone $0! = 1$.

Dati n oggetti distinti, il numero di modi in cui si possono disporre è $n!$. Il concetto di fattoriale permette di formalizzare strategie di conteggio che gli studenti hanno già utilizzato in modo intuitivo nelle attività precedenti. Nella costruzione delle possibili configurazioni, infatti, essi considerano implicitamente il numero di scelte disponibili per ciascuna posizione, applicando di fatto quello che in calcolo combinatorio è noto come principio di moltiplicazione. Quindi, il fattoriale ci permette di contare il numero di permutazioni semplici (ordinamenti) di un numero finito di oggetti.

Si ritorna al quesito del test e si chiede quanti numeri da nove cifre posso creare prendendo una sola volta tutte le cifre da 1 a 9. 9! numeri.

Si torna al quesito dell'azienda.

I quattro amici decidono di adottare un unico criterio per tutte le scelte. Devono quindi selezionarne uno tra i seguenti:

a) ordine alfabetico;

b) alternanza maschio–femmina–maschio–femmina (è indifferente che al primo posto ci sia un maschio o una femmina);

c) Davide in ultima posizione, mentre gli altri tre possono disporsi liberamente.

ATTIVITÀ: Gli studenti tornano nei gruppi precedenti e ciascun gruppo stabilisce quante e quali configurazioni sono possibili per ciascun criterio, annotando i ragionamenti e i risultati su un foglio. In questa fase è importante porre una maggiore attenzione alla formalizzazione, alla luce del quadro teorico appena introdotto.

➔ MATERIALE: carta e penna.

Successivamente si torna in plenaria per condividere e confrontare i risultati. *L'insegnante* guida la discussione, esplicitando i collegamenti con i concetti di fattoriale e di disposizioni e favorendo la formalizzazione delle strategie emerse. Nel caso *a)* esiste una sola configurazione. Nel caso *b)* i maschi sono Antonio e Davide, le femmine Barbara e Clara. Le possibili strutture sono due: M–F–M–F, F–M–F–M. Per ciascuna struttura: i maschi si possono disporre in 2! modi; le femmine si possono disporre in 2! modi. Quindi: per ogni struttura: $2! \cdot 2! = 4$ configurazioni, per un totale di $2 \cdot 4 = 8$ configurazioni. Infine, nel caso *c)* fissato Davide in ultima posizione, gli altri tre possono disporsi in modo libero, quindi bisogna ordinare tre persone in tre posti, cioè in $3! = 6$ modi.

Si ritorna al quesito del test. Inizialmente si guida la classe in una riflessione sul concetto di divisibilità per 6, cercando di individuare le condizioni necessarie affinché un numero di nove cifre sia divisibile per 6. A partire da ciò, si avvia una discussione su come costruire un tale numero. *L'insegnante* stimola il ragionamento attraverso domande guida, anche in collegamento con i quesiti svolti in precedenza, ad esempio: «Come posso costruire un numero con queste caratteristiche?» , «Quale cifra (o quali cifre) risultano determinanti?», «Quante scelte ho per queste cifre?», ecc..

CONTENUTO TEORICO
Un numero è divisibile per 6 se è contemporaneamente divisibile per 2 e per 3. Quindi, serve che il numero sia pari, cioè l'ultima cifra deve essere 2,4,6 o 8, (divisibilità per 2) e che la somma delle cifre sia un multiplo di 3 (divisibilità per 3).

Osservando che nel numero considerato le cifre da 1 a 9 compaiono tutte una sola volta, la loro somma è 45, che è un multiplo di 3. Quindi, serve solo che il numero sia pari. Allora, per creare questo numero bisogna fissare l'ultima cifra tra 2,4,6 o 8 (ho 4 scelte), e le restanti 8 possono disporsi in qualsiasi ordine (ho 8! configurazioni). Quindi, $4 \cdot 8!$ numeri.

Successivamente si introduce il concetto di probabilità. Si forniscono: la definizione di evento, la definizione classica di probabilità. A seguire, si propongono alcuni esempi di base (lancio di un dado, estrazione di una carta, lancio di una moneta, ecc.) per consolidare i concetti introdotti.

CONTENUTO TEORICO

Definizione. Dato un esperimento causale, si dice spazio campionario o universo l'insieme di tutti i possibili risultati. Un evento E è un sottoinsieme, proprio o improprio, dello spazio campionario.
Definizione. La probabilità che un evento E si verifichi è

$$P(E) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}$$

Esempio. Qual è la probabilità che, lanciando un dado regolare a 6 facce, esca il 5? E che esca un numero pari? E che il numero sia diverso da 1 e 6?

Esempio. Qual è la probabilità di pescare l'Asso d'Oro scegliendo una carta a caso da un mazzo di carte siciliane di 40 carte? E che esca un fante? E che la carta sia di Coppe?

ATTIVITÀ: Si ritorna al quesito iniziale dell'azienda. Gli studenti tornano nei gruppi precedenti e ciascun gruppo determina la probabilità che il criterio analizzato si verifichi, facendo riferimento al numero totale di configurazioni favorevoli e possibili. Le modalità e i materiali utilizzati restano gli stessi dell'attività precedente.

Successivamente si torna in plenaria per condividere e confrontare i risultati. Infine, si riprende il quesito del test e si chiede agli studenti di determinare la probabilità che il numero costruito sia divisibile per 6, applicando le considerazioni sviluppate in precedenza. *L'insegnante* chiede quali sono le configurazioni possibili e favorevoli nel nostro caso. Casi favorevoli: $4 \cdot 8!$ numeri. Casi possibili: 9! Numeri. Probabilità che il numero ottenuto sia divisibile per 6: 4/9.

Analisi del quesito 2 e primi risultati di Probabilità: *(50 minuti)*

Quesito 2: *Due urne contengono palline bianche e nere. La prima contiene 5 palline bianche e 10 nere; la seconda ne contiene 3 bianche e 7 nere. Marco prende una pallina a caso dalla seconda urna e la mette nella prima e poi estrae a caso una pallina dalla prima urna. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?*

ATTIVITÀ: si introduce un'attività con un'urna contenente un numero variabile di palline di due colori diversi. Inizialmente, l'urna contiene due palline bianche e tre nere. Si chiede agli studenti quale delle due abbia maggiore possibilità di essere estratta, invitandoli a formulare una previsione. Uno studente effettua poi diverse estrazioni con reinserimento e, insieme, si discutono i risultati ottenuti. Successivamente si modifica la composizione dell'urna: tre palline bianche e tre palline nere. Si procede come nel caso precedente, sollecitando previsioni e confrontandole con i risultati stimati.

Infine, si continua variando il numero di palline bianche e nere e chiedendo ogni volta quale colore sia più probabile estrarre. Vengono proposte diverse configurazioni, ad esempio: (es. 2 B- 4N, 3B – 1N, 0B – 5N, 4B – 1N, 2B – 2N). Le estrazioni possono essere effettuate tramite programma su Python [0].

➔ MATERIALE: Urna; almeno 5 palline bianche e 5 nere; implementazione in Python.

Nel corso di questa fase dell'attività, l'attenzione è posta sull'argomentazione e sul duplice approccio alla probabilità: qualitativo e quantitativo. È importante mettere in evidenza la differenza tra i due approcci, ma anche stimolarne l'uso integrato, favorendo il confronto tra intuizione e formalizzazione. A tal fine, *l'insegnante* guida la discussione attraverso domande come: «Quale pallina ha maggiore probabilità di essere estratta? Perché?», «Con quale probabilità può essere estratta?». In questa fase, gli studenti consolidano e rielaborano il concetto di probabilità assimilato durante l'attività precedente.

CONTENUTO TEORICO
Per probabilità qualitativa si intende il confronto tra eventi per stabilire quale sia più probabile, senza ricorrere a calcoli o formule; la probabilità quantitativa, invece, implica una valutazione numerica attraverso strumenti matematici.

ATTIVITÀ: Si inizia a ragionare sul quesito del test. Si creano le due urne con il numero di palline come indicato dal testo del quesito. «Qual è la probabilità che Marco estragga una pallina bianca dalla seconda urna?», «qual è la probabilità che Marco estragga una pallina nera dalla seconda urna?». Uno studente effettua diverse estrazioni, utilizzando un programma su Python [1;2], e, insieme, se ne discutono i risultati. Successivamente, si prende una pallina bianca dalla seconda urna e si inserisce nella prima. Con questa nuova configurazione, *l'insegnante* chiede: «Qual è la probabilità che Marco estragga una pallina bianca dalla prima urna?». Torniamo alla configurazione delle urne di partenza, adesso prendiamo una pallina nera dalla seconda urna e si inserisce nella prima; di nuovo *l'insegnante* chiede: «Qual è la probabilità che marco estragga una pallina bianca dalla prima urna?». In entrambi i casi, uno studente effettua diverse estrazioni, utilizzando un programma su Python [3-1;3-2], e, insieme, se ne discutono i risultati.

➔ MATERIALE: implementazione in Python.

In questa fase, *l'insegnante* guida la discussione verso i concetti di eventi dipendenti e di probabilità condizionata, facendo notare come il colore della pallina estratta dalla seconda urna altera la probabilità che dalla prima venga estratta una pallina bianca. Quindi, si introducono le definizioni di eventi indipendenti e di probabilità condizionata e il Teorema della probabilità composta per eventi dipendenti. Si fanno degli esempi per capire meglio i concetti.

CONTENUTO TEORICO
Definizione. Dati due eventi A e B si dicono *indipendenti* se il verificarsi dell'uno non altera la probabilità dell'altro; in caso contrario si dicono *dipendenti.* *Definizione*. Dati due eventi dipendenti A e B, si dice *probabilità condizionata* di B rispetto ad A e si indica con $P(B\backslash A)$, la probabilità assunta da B nel caso in cui A si sia verificato. Esempio. Lanciamo due volte una moneta e chiamiamo A_1 l'evento "al primo lancio esce testa" e A_2 l'evento "al secondo lancio esce croce". Sono eventi dipendenti o indipendenti? Perché? Esempio. Peschiamo una alla volta due carte da un mazzo di carte senza reinserirle nel mazzo e chiamiamo A_1 l'evento "la prima carta estratta è di Spade" e A_2 l'evento "la seconda carta estratta è di Bastoni". Sono eventi dipendenti o indipendenti? Perché?

Teorema della probabilità composta per eventi dipendenti. Dati due eventi A e B compatibili (possono verificarsi insieme) e dipendenti, la probabilità dell'evento prodotto, detta *probabilità composta,* è data dal prodotto della probabilità del primo evento per la probabilità condizionata del secondo rispetto al primo. Ovvero,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \backslash A).$$

Esempio. In un'urna ci sono 5 palline rosse e 4 palline blu. Si estraggono due palline senza rimetterle nell'urna. Qual è la probabilità che entrambe siano rosse?

Si ritorna al quesito del test e si chiede, alla luce del teorema introdotto, quale sia la probabilità che esca una pallina bianca dalla prima urna in base al colore della pallina estratta dalla seconda. In questa fase, è bene schematizzare in maniera rigorosa tutto quello che è stato fatto fino a questo punto. Si definiscono i diversi eventi, si calcola la probabilità di ogni evento e si analizza quali tra questi sono dipendenti o indipendenti, annotando i ragionamenti e i risultati su un foglio. *L'insegnante* potrebbe guidare la discussione con queste domande, ma è bene che siano gli studenti a definire i vari eventi:

- Chiamiamo B_1 l'evento: "Marco estrae una pallina bianca dalla seconda urna". Qual è la probabilità che si verifichi questo evento? 3/10.
- Sia adesso A_1 l'evento "Marco estrae una pallina bianca dalla prima urna dopo averne aggiunta una dalla seconda". Gli eventi A_1 e B_1 sono dipendenti o indipendenti? Perché? Sono dipendenti perché la probabilità che si verifichi varia in base al colore della pallina che viene inserita.
- Supponendo che B_1 si sia verificato, qual è la probabilità che si verifichi A_1? 6/16.
- Qual è la probabilità che entrambe le palline siano bianche? Utilizzo il Teorema della probabilità composta per eventi dipendenti: $P(B_1) \cdot P(A_1|B_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{16} = \frac{9}{80}$.
- Sia adesso B_2 l'evento "Marco estrae una pallina nera dalla seconda urna". Qual è la probabilità che si verifichi questo evento? 7/10.
- Ricordiamo che A_1 è l'evento "Marco estrae una pallina bianca dalla prima urna dopo averne aggiunta una dalla seconda urna". Gli eventi A_1 e B_2 sono dipendenti o indipendenti? Perché? Sono dipendenti perché la probabilità che si verifichi varia in base al colore della pallina che viene inserita.
- Supponendo che B_2 si sia verificato, qual è la probabilità che si verifichi A_1? 5/16.
- Qual è la probabilità che si verifichino sia B_2 che A_1? Utilizzo il Teorema della probabilità composta per eventi dipendenti: $P(B_2) \cdot P(A_1|B_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{16} = \frac{7}{32}$.
- Almeno uno degli eventi B_1 e B_2 deve verificarsi? Possono verificarsi insieme? Estraendo una pallina dalla seconda urna, questa deve essere necessariamente o bianca o nera, cioè almeno uno dei due eventi deve verificarsi, ma non possono verificarsi entrambi.

Nota bene: l'ultima domanda è fondamentale per introdurre il concetto di eventi incompatibili ed eventi esaustivi.

Successivamente, si forniscono le definizioni di eventi esaustivi ed eventi incompatibili. Si fanno degli esempi per comprendere il nuovo concetto. Si ritorna al nostro quesito e si chiede « gli eventi B_1 e B_2 sono incompatibili? Sono esaustivi? Perché?». Quindi si introduce il teorema della probabilità totale fornendo una spiegazione della formula. Infine, si chiede « da quanti e quali casi dipende il nostro evento A_1?», « Quindi, qual è la probabilità che la pallina estratta dalla prima urna sia bianca?». Utilizzo il Teorema della probabilità totale: $P(B_1) \cdot P(A_1|B_1) + P(B_2) \cdot P(A_1|B_2) = \frac{9}{80} + \frac{7}{32} = \frac{53}{160}$.

A conclusione si può fare qualche simulazione su Python [3-3] per visualizzare quanto analizzato.

➔ MATERIALE: carta e penna; implementazione in Python.

CONTENUTO TEORICO

Definizione. Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se non possono verificarsi insieme; si dicono *esaustivi* se uno di essi deve verificarsi.

Esempio. Consideriamo il lancio di un dado e siano A l'evento "esce 3" e B l'evento "esce 5". Tali eventi sono incompatibili? Sono esaustivi? Perché?

Esempio. Consideriamo il lancio di un dado e siano A l'evento "esce un numero pari" e B l'evento "esce un numero dispari o maggiore di 5". Tali eventi sono incompatibili? Sono esaustivi? Perché?

Teorema della probabilità totale. Siano A_1 e A_2 due eventi incompatibili ed esaustivi. Allora, per ogni evento B si ha

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B\backslash A_1) + P(A_2) \cdot P(B\backslash A_2).$$

Conclusione attività didattica: la probabilità e l'educazione civica. *(20 minuti)*

ATTIVITÀ: Si introduce alla classe il concetto di quota. La quota indica quanto si ottiene in caso di vincita rispetto alla somma giocata. Più precisamente, prima di ogni estrazione, ciascuno studente comunica al banco (*l'insegnante*) la quantità di denaro che intende scommettere su uno dei due colori (pallina rossa o pallina blu). Se la scommessa è perdente, il banco trattiene l'intera somma giocata. Se la scommessa è vincente, il banco restituisce allo studente una somma pari alla giocata moltiplicata per la quota. Ad esempio, se la quota della pallina verde è 1,7 e uno studente punta 5€ sulla sua uscita, in caso di vincita riceverà $5 \times 1{,}7 = 8{,}5$€. Poiché aveva inizialmente puntato 5€, il guadagno netto sarà di 3,5€.

Si avvia l'attività proponendo la seguente situazione iniziale e chiedendo agli studenti di riflettere sulle quote offerte per decidere su quale colore scommettere e quanto puntare:

		Quote	
Palline rosse	***Palline blu***	***Pallina rossa***	***Pallina blu***
1	3	5	1.1

Dopo aver raccolto le scommesse, si effettua l'estrazione (anche su Python [0]) e si distribuiscono le vincite in base all'esito e alle quote. L'esperimento viene ripetuto più volte mantenendo invariata la configurazione, stimolando la classe a formulare ipotesi su quale scommessa sia, nel lungo periodo, più conveniente. Per supportare la riflessione, è utile registrare alla lavagna gli esiti di circa 15 estrazioni. A questo punto si pongono domande del tipo: "Quanto ha vinto o perso chi ha puntato sempre 1€ sul blu?" , "E chi ha puntato sempre 1€ sul rosso?". Dalla discussione emerge che, nel lungo periodo, è più conveniente giocare sul rosso. La pallina rossa infatti esce in media una volta su quattro, e la quota è a 5.

Si procede dunque cambiando le quote e il numero di palline per esplorare diverse situazioni, mantenendo però sempre esclusivamente palline rosse e verdi.

		Quote	
Palline rosse	***Palline blu***	***Pallina rossa***	***Pallina blu***
2	3	2.4	1.4
3	5	2.2	1.4

2	1	1.4	2.5
2	2	1.8	1.5

Nell'ultima configurazione (2 palline rosse e 2 blu), si guida la discussione verso un risultato più profondo. In un primo momento, gli studenti possono ritenere più conveniente una delle due opzioni; tuttavia, attraverso il confronto e la sperimentazione, si arriva a osservare che nessuna delle due scommesse è conveniente nel lungo periodo.

Per verificarlo, si ripete l'esperimento e si calcolano i guadagni/perdite di un giocatore che punta sempre la stessa somma sullo stesso colore. Dopo un numero sufficientemente elevato di estrazioni, emerge che entrambe le strategie portano a una perdita complessiva.

➔ MATERIALE: carta e penna; urna; palline rosse e blu; implementazione in Python.

In questa fase è necessario dare una definizione di quota equa e capire come calcolarla. Successivamente, si fanno delle riflessioni su quando conviene scommettere.

CONTENUTO TEORICO

Una scommessa è equa quando, nel lungo periodo, né il banco né il giocatore guadagnano o perdono: il guadagno atteso è nullo. Nel caso di probabilità P, la quota equa è:

$$\text{quota equa} = \frac{1}{P}$$

Ad esempio, se le palline rosse e blu sono in ugual numero: $P = \frac{1}{2}$ e quota equa = 2.

Infatti, su un numero elevato di estrazioni, le vincite compensano esattamente le perdite. Quindi, è bene osservare che: se la quota è inferiore a quella equa allora la scommessa è sfavorevole e che nella realtà, le quote sono costruite per favorire il banco.

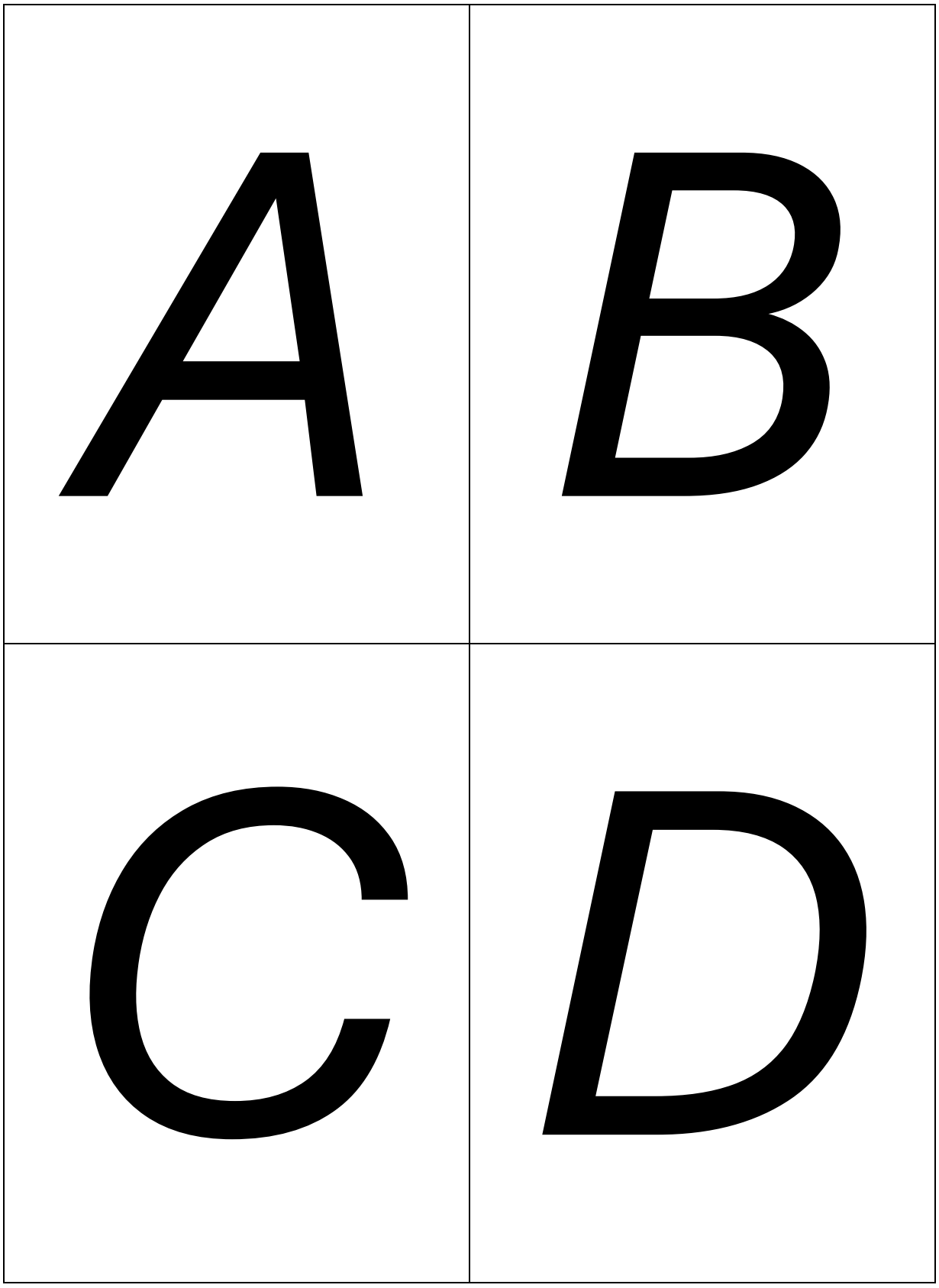
PIANTINA PARCHEGGIO DELL'AZIENDA CON 3 POSTI AUTO

1.	**2.**	**3.**

PIANTINA PARCHEGGIO DELL'AZIENDA CON 4 POSTI AUTO

1.	**2.**	**3.**	**4.**

INIZIALI DEI NOMI DEGLI AMICI



IMPLEMENTAZIONE IN PYTHON DELLA SIMULAZIONE DELLE ESTRAZIONI

```
import random
random.seed()
comando = int(input("Cosa vuoi fare?\n"
                    "0 - Estrai da un'urna a piacimento\n"
                    "1 - Estrai dalla prima urna\n"
                    "2 - Estrai dalla seconda urna\n"
                    "3 - Prendi dalla seconda e inseriscila nella prima\n"))
numeroestrazioni=int(input("Quante estrazioni vuoi fare?\t"))
#creiamo la nostra urna ed eseguiamo le estrazioni
if comando == 0:
    bianche=int(input("numero di palline bianche nell'urna:\t"))
    nere=int(input("numero di palline nere nell'urna:\t"))
    num_b=0
    num_n=0
    for i in range(numeroestrazioni):
        urna=["B"]*bianche+["N"]*nere #composizione dell'urna
        estratta = random.sample(urna, 1)
        if estratta == ["B"]:
           num_b=num_b + 1
           print(i+1,") è stata estratta una pallina bianca")
        else:
           num_n=num_n + 1
           print(i+1, ")è stata estratta una pallina nera")
    if bianche > nere:
        print("è più probabile che esca una pallina bianca;\n"
              "è stata estratta una pallina bianca",num_b,"volte su", numeroestrazioni, "; \n"
              "è stata estratta una pallina nera",num_n,"volte su", numeroestrazioni)
    if bianche < nere:
        print("è più probabile che esca una pallina nera;\n"
              "è stata estratta una pallina bianca",num_b,"volte su", numeroestrazioni, "; \n"
              "è stata estratta una pallina nera",num_n,"volte su", numeroestrazioni)
    if bianche == nere:
        print("i due esiti hanno stessa probabilit,;\n"
              "è stata estratta una pallina bianca",num_b,"volte su", numeroestrazioni, "; \n"
              "è stata estratta una pallina nera",num_n,"volte su", numeroestrazioni)
```

```
#estrazioni dalla prima urna

if comando==1:

   num_b=0

   num_n=0

   for i in range(numeroestrazioni):

       urna1= ["B"]*5+["N"]*10 #composizione della prima urna

       estratta1 = random.sample(urna1, 1)

       if estratta1==["B"]:

          num_b=num_b + 1

          print(i+1,") è stata estratta una pallina bianca")

       else:

          num_n=num_n + 1

          print(i+1, ")è stata estratta una pallina nera")

#poiché la probabilità che esca una pallina bianca è 5 su 15, è più probabile che esca una
pallina nera.

   print("è più probabile che esca una pallina nera;\n"

         "è stata estratta una pallina bianca",num_b,"volte su", numeroestrazioni, "; \n"

         "è stata estratta una pallina nera",num_n,"volte su", numeroestrazioni)


#estrazioni dalla seconda urna

if comando==2:

   num_b=0

   num_n=0

   for i in range(numeroestrazioni):

       urna2= ["B"]*3+["N"]*7 #composizione della seconda urna

       estratta1 = random.sample(urna2, 1)

       if estratta1==["B"]:

          num_b=num_b + 1

          print(i+1,") è stata estratta una pallina bianca")

       else:

          num_n=num_n + 1

          print(i+1, ")è stata estratta una pallina nera")

#poiché la probabilità che esca una pallina bianca è 3 su 10, è più probabile che esca una
pallina nera.

   print("è più probabile che esca una pallina nera;\n"

         "è stata estratta una pallina bianca",num_b,"volte su", numeroestrazioni, "; \n"

         "è stata estratta una pallina nera",num_n,"volte su", numeroestrazioni)
```

```
#prendiamo una pallina dalla seconda urna ed inseriamola nella prima

if comando == 3:

   comando2 = int(input("1 - la pallina è bianca\n"

                        "2 - la pallina è nera\n"

                        "3 - estrai a caso\n"))


#adesso supponiamo che sia stata estratta una pallina bianca dalla seconda urna e sia stata
inserita nella prima

   if comando2 == 1:

        #estrazioni dalla prima urna dopo l'inserimento

        num_b=0

        num_n=0

        for i in range(numeroestrazioni):

            urna1_new= ["B"]*6+["N"]*10

            estratta1_new = random.sample(urna1_new, 1)

            if estratta1_new==["B"]:

                num_b=num_b + 1

                print(i+1,") è stata estratta una pallina bianca")

            else:

                num_n=num_n + 1

                print(i+1, ")è stata estratta una pallina nera")

#la probaiblità che venga estratta una pallina bianca dalla prima urna dopo che ne è stata
inserita una bianca dalla seconda è 6 su 16

        print("è più probabile che esca una pallina nera;\n"

              "è stata estratta una pallina bianca",num_b,"volte su", numeroestrazioni, "; \n"

              "è stata estratta una pallina nera",num_n,"volte su", numeroestrazioni)


#adesso supponiamo che sia stata estratta una pallina nera dalla seconda urna e sia stata
inserita nella prima

   if comando2 == 2:

        #estrazioni dalla prima urna dopo l'inserimento

        num_b=0

        num_n=0

        for i in range(numeroestrazioni):

            urna1_new= ["B"]*5+["N"]*11

            estratta1_new = random.sample(urna1_new, 1)

            if estratta1_new==["B"]:

                num_b=num_b + 1
```

```
            print(i+1,") è stata estratta una pallina bianca")
        else:
            num_n=num_n + 1
            print(i+1, ")è stata estratta una pallina nera")
#la probaiblità che venga estratta una pallina bianca dalla prima urna dopo che ne è stata
#inserita una bianca dalla seconda è 5 su 16
    print("è più probabile che esca una pallina nera;\n"
          "è stata estratta una pallina bianca",num_b,"volte su", numeroestrazioni, "; \n"
          "è stata estratta una pallina nera",num_n,"volte su", numeroestrazioni)


#adesso facciamo un'estrazione dalla seconda urna e inseriamola nella prima calcolo probabilità
totale
  if comando2==3:
    #estrazioni dalla prima urna dopo l'inserimento
        num_b=0
        num_n=0
        for i in range(numeroestrazioni):
            urna2= ["B"]*3+["N"]*7 #composizione seconda urna
            estrazione1=random.sample(urna2, 1) #estrazione dalla seconda urna
            urna1_new=["B"]*5+["N"]*10+estrazione1 #inserisco la pallina nella prima urna
            estrazione2=random.sample(urna1_new, 1)
            if estrazione2==["B"]:
                num_b=num_b + 1
                print(i+1,") è stata estratta una pallina bianca")
            else:
                num_n=num_n + 1
                print(i+1, ")è stata estratta una pallina nera")


#sappiamo che in questo caso la probabilità che esca una pallina bianca sia 53 su 160, quindi è
più probabile che esca una pallina nera!
        print("è più probabile che esca una pallina nera;\n"
             "è stata estratta una pallina bianca",num_b,"volte su", numeroestrazioni, "; \n"
             "è stata estratta una pallina nera",num_n,"volte su", numeroestrazioni)
```

Quesiti di Probabilità – Test finale

Nickname: _____

1. Considerando l'insieme di tutti i possibili anagrammi, anche privi di significato compiuto, della parola CONTABILE, qual è la probabilità che in uno di essi compaia la sequenza di lettere consecutive LATO?

2. Siano date tre urne: nella prima ci sono 8 palline rosse e 7 verdi; nella seconda 11 rosse e 9 verdi; nella terza 2 rosse e 8 verdi. Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina. Qual è la probabilità che la pallina sia rossa?
   Dopo aver reinserito la pallina nell'urna di provenienza, si estraggono in successione, senza reinserimento, due palline dalla prima urna e due palline dalla seconda urna. Qual è la probabilità che le quattro palline estratte siano tutte verdi?

3. Al palio di Siena la probabilità che vinca Pantera è data 1 contro 3 e la probabilità che vinca Valdimontone è data 1 contro 5. Qual è la probabilità che non vinca né Pantera né Valdimontone? (*Dire che la vittoria di Tizio è data x contro y vuol dire che si attribuisce all'evento "Tizio vince" la probabilità* $\frac{x}{x+y}$*)*

Capitolo 5

Analisi della sperimentazione

Il presente capitolo è dedicato all'analisi dei dati emersi durante la sperimentazione didattica, con l'obiettivo di indagare come la metodologia laboratoriale possa favorire e supportare l'apprendimento degli studenti.

5.1 Contesto della classe coinvolta

La sperimentazione è stata condotta presso il Liceo Statale "Boggio Lera" di Catania, istituzione scolastica autonoma appartenente al settore pubblico, sotto la diretta amministrazione del Ministero dell'Istruzione e del Merito. Situata nel cuore del centro storico cittadino, all'interno dello storico complesso monumentale del Monastero della Santissima Trinità, la scuola rappresenta una realtà di ampie dimensioni, con una popolazione scolastica superiore alle mille unità e un corpo docente proporzionato alla complessità della struttura. L'attività principale dell'istituto è l'erogazione di servizi formativi di istruzione secondaria di secondo grado, con una specializzazione prevalente nell'indirizzo scientifico — articolato nelle opzioni ordinamento e scienze applicate — e nell'indirizzo linguistico.

L'attività di ricerca ha coinvolto una classe terza dell'indirizzo scientifico - scienze applicate, composta da 15 studenti (7 alunni e 8 alunne). Nel corso delle sessioni proposte, il gruppo classe ha manifestato un atteggiamento generalmente attento e

collaborativo, partecipando con interesse sia alla fase di pre-test sia alle successive integrazioni teoriche. Le attività laboratoriali di gruppo sono state affrontate con dedizione e serietà; solo una ristretta cerchia di alunni - soprattutto durante il terzo incontro- ha mostrato sporadici momenti di distrazione, i quali, tuttavia, non hanno compromesso l'andamento complessivo della didattica.

Durante l'osservazione, è emersa una chiara distinzione tra studenti dotati di solide competenze nel *problem solving* e allievi con maggiori difficoltà. Tale eterogeneità è risultata un punto di forza: gli studenti più esperti hanno assunto spontaneamente funzioni di *leadership*, agendo come elementi di stimolo e favorendo il coinvolgimento dei compagni. Questa dinamica di cooperazione è stata fondamentale per il corretto svolgimento delle attività, trasformando la diversità di competenze in una risorsa per il lavoro collettivo.

In conclusione, nonostante si tratti di una classe vivace, il comportamento degli studenti è sempre stato improntato alla correttezza e al rispetto delle regole, con una partecipazione al dialogo educativo propositiva e costruttiva.

5.2 Analisi dell'attività didattica

Nella presente sezione viene analizzato nel dettaglio lo svolgimento dei tre incontri, con un'attenzione specifica alle dinamiche di partecipazione, agli errori più comuni, agli interventi didattici mirati e alle difficoltà ricorrenti emerse durante l'intero percorso laboratoriale.

Per garantire un clima di lavoro sereno, stimolante e privo del timore del giudizio valutativo, i test sono stati somministrati in forma non nominale, lasciando agli studenti la libertà di identificarsi tramite un *nickname* di propria invenzione. Analogamente, i questionari di gradimento sono stati raccolti in forma totalmente anonima, al fine di favorire la massima sincerità nei feedback. Si precisa, inoltre, che i dialoghi e gli scambi verbali riportati nel testo sono stati fedelmente trascritti a partire dalle registrazioni effettuate durante gli incontri, previa autorizzazione

formale concessa dall'istituzione scolastica e dalle famiglie degli studenti coinvolti.

L'analisi che segue prenderà in esame gli esiti e i protocolli più significativi prodotti dagli allievi, fornendo una valutazione generale delle risposte, un commento critico sugli interventi più frequenti e un'interpretazione sistematica dei dati emersi dal questionario conclusivo.

5.2.1 Primo incontro

Al primo incontro hanno partecipato dodici studenti. La fase di sperimentazione ha avuto inizio alle ore 09:20 con la consegna del pre-test; successivamente, alle 09:40, è stata offerta la possibilità di consultare la scheda guidata e, infine, alle 10:15 sono stati ritirati gli elaborati.

L'impatto iniziale con il test è stato caratterizzato da un diffuso senso di incertezza riguardo alle strategie risolutive da adottare. Nonostante il disorientamento iniziale, la classe ha mostrato una partecipazione attiva e un approccio serio al compito. Si è tuttavia registrata una polarizzazione nei comportamenti: alcuni studenti hanno richiesto immediatamente il supporto della scheda guidata, rinunciando a un tentativo di risoluzione autonoma; altri hanno cercato il confronto con i pari, mentre una piccola parte dei partecipanti, percependo la prova come eccessivamente distante dalle proprie capacità, ha manifestato episodi di distrazione. L'approccio ai concetti probabilistici ha fatto emergere dubbi di natura linguistica e formale, ben sintetizzati da domande quali: ≪*cosa cambia tra "qual è" e "quant'è" la probabilità di...?*≫, o dalla convinzione che tale valore debba essere espresso necessariamente in forma percentuale. È emersa, di contro, una propensione verso la visualizzazione dei problemi: diversi studenti hanno infatti chiesto di poter rappresentare i quesiti con degli schemi per agevolare il ragionamento.

In conclusione, nonostante la prova vertesse su nuclei tematici quasi del tutto inediti per il campione esaminato, gli studenti hanno manifestato un vivo interesse e un coinvolgimento attivo verso l'attività proposta. Tale entusiasmo è emerso chiaramente dal confronto spontaneo nato tra i pari al termine della sessione e, in

particolare, dall'osservazione di uno studente che ha dichiarato: «L'attività di oggi mi ha incuriosito e mi ha stimolato il cervello».

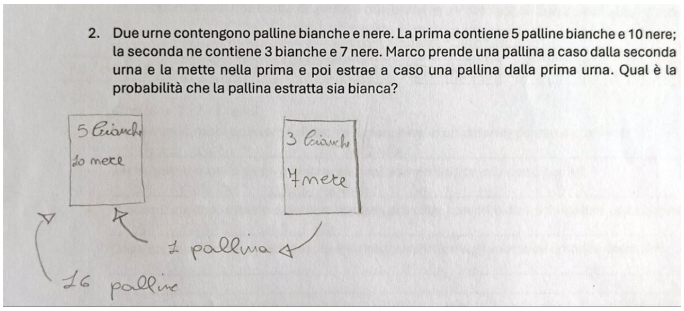


Figura 5.1: Rappresentazione del secondo quesito

Scheda guidata. Al momento della distribuzione effettiva della scheda guidata, si è osservato un mutamento nelle intenzioni: alcuni degli studenti che l'avevano inizialmente richiesta hanno preferito proseguire in autonomia, talvolta mossi da una forma di "orgoglio" intellettuale, come espresso da uno studente che ha dichiarato: «*non la voglio, è malafiura*». In totale, sette studenti su dodici hanno usufruito del sussidio; tra questi, due lo hanno richiesto solo nella fase finale come strumento di verifica.

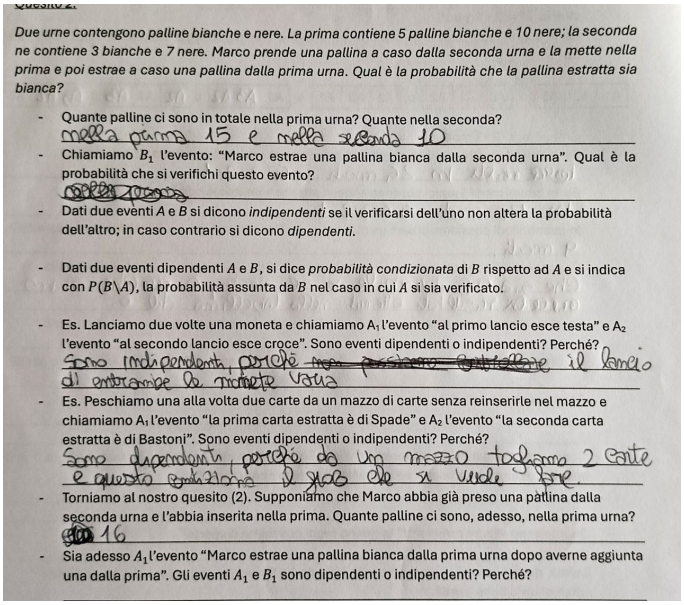
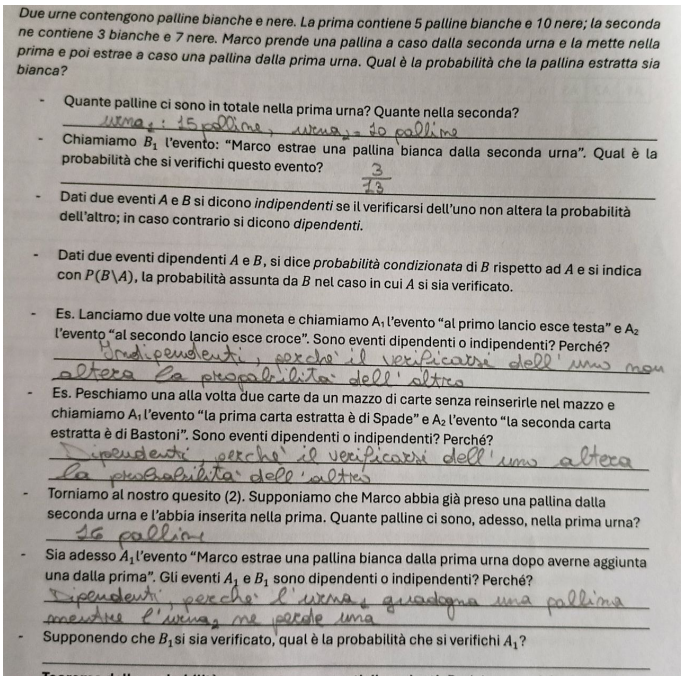


Figura 5.2: Applicazione del fattoriale con la scheda guidata

L'efficacia della scheda è risultata controversa, tanto da spingere uno studente a chiedere scherzando: «c'è la scheda guidata per la scheda guidata?». Sebbene non abbia portato alla risoluzione completa dei quesiti — evidenziando una persistente confusione tra casi possibili e casi favorevoli — essa ha favorito una riflessione più profonda sui primi due problemi. Nel primo quesito, la scheda ha guidato gli studenti nell'applicazione del fattoriale, mentre nel secondo ha stimolato il confronto sui concetti di eventi dipendenti e indipendenti. Tuttavia, molti allievi hanno mostrato difficoltà nel trasferire gli esempi teorici alla risoluzione pratica, limitandosi spesso a riportare la definizione formale alla domanda "perché?".



Due urne contengono palline bianche e nere. La prima contiene 5 palline bianche e 10 nere; la seconda ne contiene 3 bianche e 7 nere. Marco prende una pallina a caso dalla seconda urna e la mette nella prima e poi estrae a caso una pallina dalla prima urna. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

- Quante palline ci sono in totale nella prima urna? Quante nella seconda?
  urna$_1$: 15 palline, urna$_2$ = 10 palline
- Chiamiamo B_1 l'evento: "Marco estrae una pallina bianca dalla seconda urna". Qual è la probabilità che si verifichi questo evento? $\frac{3}{13}$
- Dati due eventi A e B si dicono *indipendenti* se il verificarsi dell'uno non altera la probabilità dell'altro; in caso contrario si dicono *dipendenti*.
- Dati due eventi dipendenti A e B, si dice *probabilità condizionata* di B rispetto ad A e si indica con $P(B|A)$, la probabilità assunta da B nel caso in cui A si sia verificato.
- Es. Lanciamo due volte una moneta e chiamiamo A_1 l'evento "al primo lancio esce testa" e A_2 l'evento "al secondo lancio esce croce". Sono eventi dipendenti o indipendenti? Perché?
  Indipendenti, perché il verificarsi dell'uno non altera la probabilità dell'altra
- Es. Peschiamo una alla volta due carte da un mazzo di carte senza reinserirle nel mazzo e chiamiamo A_1 l'evento "la prima carta estratta è di Spade" e A_2 l'evento "la seconda carta estratta è di Bastoni". Sono eventi dipendenti o indipendenti? Perché?
  Dipendenti, perché il verificarsi dell'uno altera la probabilità dell'altro
- Torniamo al nostro quesito (2). Supponiamo che Marco abbia già preso una pallina dalla seconda urna e l'abbia inserita nella prima. Quante palline ci sono, adesso, nella prima urna?
  16 palline
- Sia adesso A_1 l'evento "Marco estrae una pallina bianca dalla prima urna dopo averne aggiunta una dalla prima". Gli eventi A_1 e B_1 sono dipendenti o indipendenti? Perché?
  Dipendenti, perché l'urna$_2$ guadagna una pallina mentre l'urna$_2$ ne perde una
- Supponendo che B_1 si sia verificato, qual è la probabilità che si verifichi A_1?

Figura 5.3: Ragionamenti sulla dipendenza tra eventi

Analisi del Quesito 1. L'analisi degli elaborati relativi al primo quesito ha evidenziato criticità specifiche nel trattamento del fattoriale. La tendenza della quasi totalità del campione è stata quella di sviluppare il calcolo di 9! per esteso, manifestando una scarsa abitudine all'uso di scritture compatte e alle semplificazioni algebriche. La richiesta frequente dell'uso della calcolatrice conferma una dipendenza dallo strumento a discapito della capacità di manipolazione dei rapporti. Per

quanto riguarda le proprietà numeriche, la divisibilità per 6 è stata interpretata quasi esclusivamente attraverso la ricerca dei multipli della "tabellina", trascurando l'applicazione dei criteri di divisibilità per 2 e per 3. Inoltre, nel determinare i casi favorevoli, l'attenzione si è concentrata quasi unicamente sull'ultima cifra, senza considerare correttamente le permutazioni delle restanti otto posizioni.

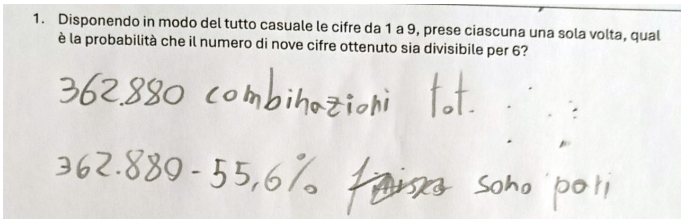


Figura 5.4: Confronto tra numeri interi e percentuali. Sviluppo di 9!

Nonostante le difficoltà di calcolo e alcune confusioni nella rappresentazione dei risultati (confronto tra numeri interi e percentuali), quattro studenti — i quali hanno scelto di non avvalersi della scheda guidata — sono riusciti a completare correttamente il quesito.

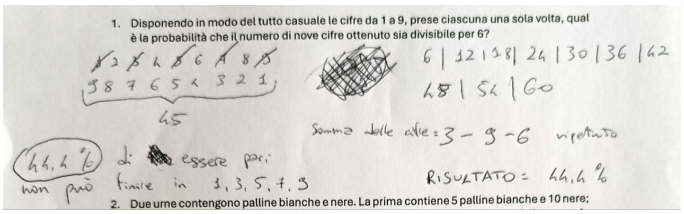


Figura 5.5: Svolgimento del primo quesito

Analisi del Quesito 2. Il secondo quesito ha rappresentato la sfida più complessa per il campione esaminato: nessuno studente, infatti, è riuscito a giungere alla risoluzione corretta, nonostante oltre la metà dei partecipanti abbia tentato di affrontarlo. Durante il secondo incontro, un allievo ha confermato tale percezione definendolo esplicitamente come «il quesito più difficile».

L'analisi dei protocolli rivela che quasi tutti gli studenti hanno impostato il ragionamento attraverso rappresentazioni grafiche delle due urne. Molti hanno individuato correttamente la sussistenza di una dipendenza tra le due estrazioni, ma

tale intuizione non si è tradotta in una correizzazione formale, indipendentemente dall'utilizzo della scheda guidata.

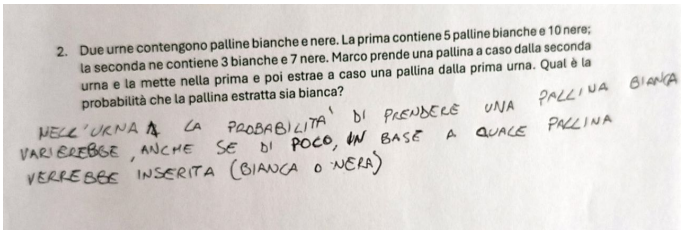


Figura 5.6: Dipendenza tra le due estrazioni

I tentativi di risoluzione si sono concentrati principalmente su due filoni di ragionamento errati. Alcuni studenti hanno tentato di utilizzare rapporti proporzionali tra la prima e la seconda urna per calcolare la probabilità finale, assumendo a piori che la pallina travasata fosse di colore bianco, trascurando l'incertezza legata alla prima estrazione.

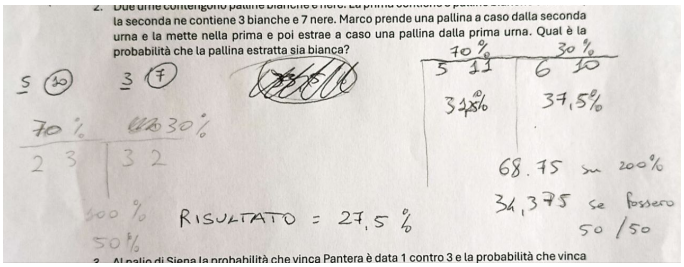


Figura 5.7: Calcolo della media aritmetica tra le probabilità ottenute

Altri allievi hanno correttamente intuito che la pallina estratta dalla seconda urna potesse essere sia bianca che nera, procedendo all'analisi separata dei due scenari. Tuttavia, nel tentativo di ricavare la probabilità totale, hanno erroneamente calcolato la media aritmetica tra le probabilità ottenute nei due casi, anziché applicare il Teorema della Probabilità Totale.

Analisi del Quesito 3. L'analisi degli elaborati relativi al terzo quesito mostra come l'attività sia stata approcciata prevalentemente dagli studenti che non hanno usufruito della scheda guidata o che l'hanno consultata solo nelle fasi conclusive; complessivamente, sette studenti hanno tentato la risoluzione. Di questi,

solo tre sono riusciti a completare correttamente l'esercizio, dimostrando una buona padronanza dei teoremi della probabilità.

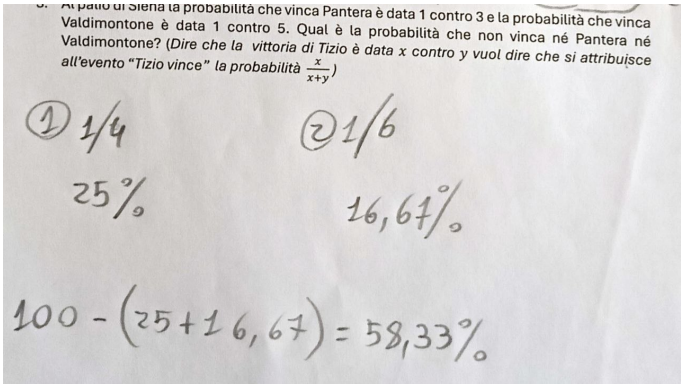


Figura 5.8: Risoluzione del terzo quesito

Le criticità emerse riflettono ostacoli di natura sia semantica che logica. Nonostante la nota esplicativa presente nel testo, un allievo, pur avendo impostato correttamente il ragionamento probabilistico, ha interpretato erroneamente il concetto di "x contro y", giungendo a un risultato finale errato. Analogamente, altri due studenti hanno manifestato confusione su questo concetto, compromettendo la fase iniziale della modellizzazione. Infatti, hanno tentato di risolvere il problema analizzando gli eventi contrari. Tuttavia, nel passaggio cruciale del calcolo della probabilità dell'intersezione, è riemersa l'euristica fallace già osservata nel quesito precedente: gli allievi hanno calcolato la media aritmetica dei risultati relativi ai singoli eventi, anziché procedere alla corretta composizione probabilistica.

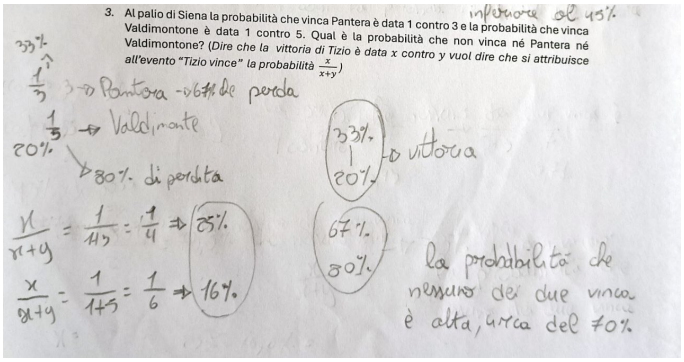


Figura 5.9: Intepretazioni di "x contro y". Calcolo della media aritmetica tra le probabilità degli eventi contrari

L'ultimo studente ha prodotto due linee di ragionamento rimaste allo stato embrionale, prive di riferimenti operativi agli eventi contrari o alle leggi di De Morgan necessarie per la risoluzione.

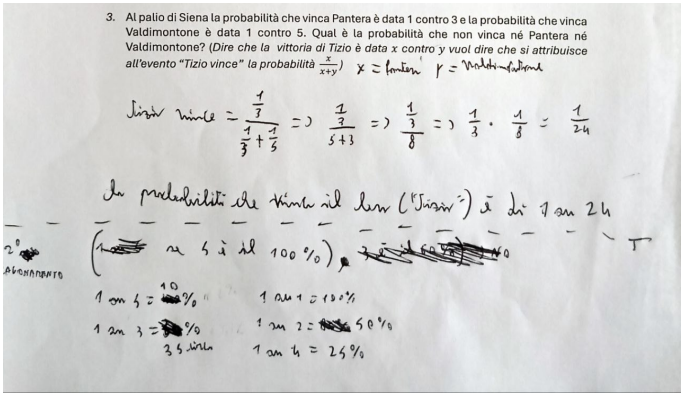


Figura 5.10: Ragionamenti sul terzo quesito

Questi dati confermano come la difficoltà non risieda soltanto nel calcolo numerico, ma persista nella fase di traduzione dal linguaggio naturale (la scommessa "x contro y") a quello formale e nella successiva scelta degli operatori logici per connettere eventi tra loro dipendenti o incompatibili.

5.2.2 Secondo incontro

Il secondo incontro si è svolto in data 31 marzo 2026, con la partecipazione di dieci studenti, nella fascia oraria compresa tra le 8:30 e le 10:15. In questa sezione verranno analizzate nel dettaglio le dinamiche relazionali e cognitive emerse in classe, documentando i processi di ragionamento e gli scambi comunicativi che hanno caratterizzato le tre fasi dell'attività.

Per facilitare la lettura dei protocolli e dei dialoghi riportati, si adotteranno le seguenti convenzioni:

- **G1, G2, G3:** identificano i rispettivi gruppi di lavoro;
- **I:** identifica l'intervento del ricercatore/docente;
- **S (S1, S2, ...):** identifica gli interventi dei singoli studenti.

L'analisi che segue mira a evidenziare non solo la correttezza formale delle soluzioni proposte, ma soprattutto il percorso logico-deduttivo, le esitazioni e i conflitti cognitivi scaturiti dal confronto con i problemi e con i mediatori didattici utilizzati.

Prima parte. I primi quarantacinque minuti dell'incontro sono stati dedicati all'analisi del primo quesito del pre-test. Al fine di favorire una collaborazione efficace tra pari, gli studenti sono stati suddivisi in tre gruppi di lavoro, avendo cura di distribuire i tre studenti che avevano ottenuto i risultati migliori nel pre-test in gruppi differenti.

L'attività ha avuto inizio con la presentazione di un problema contestualizzato, riguardante tre amici intenzionati a fondare un'azienda (vedi sezione precedente). Durante la spiegazione della consegna, la classe ha mostrato alti livelli di attenzione e partecipazione, procedendo alla stesura di appunti individuali.



Figura 5.11: Stesura di appunti durante la spiegazione della consegna

Successivamente, i gruppi hanno iniziato la fase operativa, effettuando diverse prove pratiche attraverso l'ausilio dei materiali didattici forniti (macchinine, lettere) e annotando i risultati intermedi su appositi fogli di lavoro. Nello specifico, i gruppi si sono occupati di tre aspetti distinti del problema: il gruppo **G1** ha analizzato le possibili configurazioni relative alla disposizione delle autovetture nel parcheggio aziendale; il gruppo **G2** ha lavorato sulle combinazioni possibili per la scelta del nome dell'azienda; il gruppo **G3** ha esaminato le permutazioni dei posti a sedere.

Al termine della fase di gruppo, l'attività è proseguita in plenaria per la discussione collettiva dei risultati ottenuti e per la condivisione delle strategie risolutive adottate.

> I: «Supponiamo che i tre amici abbiano già lavorato in autonomia e si stiano riunendo per condividere i risultati. Quante configurazioni abbiamo trovato per ogni situazione?»
>
> G2: «6: ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA»
>
> G3: «6»
>
> G1: «3»
>
> I: «come siete arrivati a 3 modi?»
>
> G1: «abbiamo fatto prima che B stava nel primo, poi nel terzo e poi nel secondo, e così via per gli altri due»
>
> I: «ma se mettiamo B nel primo, ad esempio, come posso mettere gli altri due?»
>
> G1: «Clara nel secondo e Antonio nel terzo»
>
> I: «e l'altro modo»
>
> G1: «C nel terzo e A nel secondo»
>
> I: «quindi ogni volta che ne fisso uno in un posto, in quanti modi posso sistemare gli altri due?»
>
> G1: «2»
>
> I: «e quindi quanti sono in totale?»
>
> G1: «6»

In questa fase operativa, si sono osservati approcci metodologici differenti tra i gruppi. Mentre i gruppi **G2** e **G3** hanno mostrato una maggiore sistematicità, il gruppo **G1** ha adottato una strategia parziale: i componenti hanno ragionato fissando un elemento alla volta nella prima posizione, ma limitandosi a considerare un'unica configurazione per i restanti soggetti, non esaurendo così lo spazio campionario.

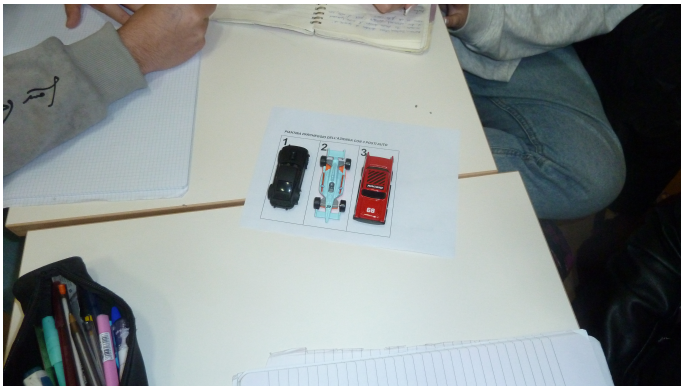


Figura 5.12: G1 ragiona sul quesito

Al contrario, il gruppo **G2** ha seguito un iter logico analogo a quello di **G1** (metodo dell'ancoraggio alla prima posizione) ma con una maggiore accuratezza, analizzando sistematicamente tutti i casi possibili; tale rigore è emerso chiaramente nella formulazione della risposta finale. Il gruppo **G3**, pur giungendo alla soluzione corretta, ha proceduto per tentativi ed errori senza seguire un ordine procedurale predefinito, evidenziando un approccio più intuitivo che algoritmico.

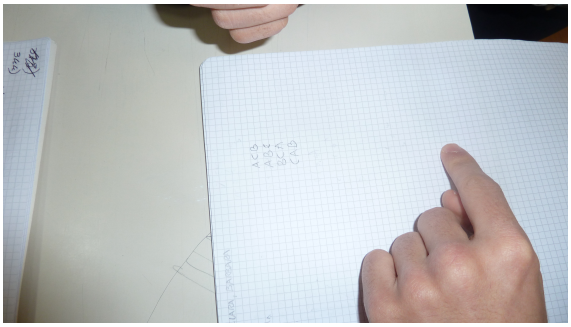


Figura 5.13: G3 ragiona sul quesito

Successivamente, ho introdotto una variante del problema estendendo lo scenario a quattro soggetti, richiedendo alla classe di applicare il medesimo ragionamento in un contesto di maggiore complessità. Questa sollecitazione ha prodotto reazioni immediate: «Sono 12», «4 per 3 per 2... 24!».

A seguito di questo primo confronto spontaneo, gli studenti sono tornati a lavorare nei rispettivi gruppi. La strategia prevalente è stata nuovamente quella empirica, basata sull'enumerazione delle diverse prove di sistemazione dei quattro amici, con

l'obiettivo di validare o confutare le ipotesi emerse prima di tornare al confronto in plenaria.

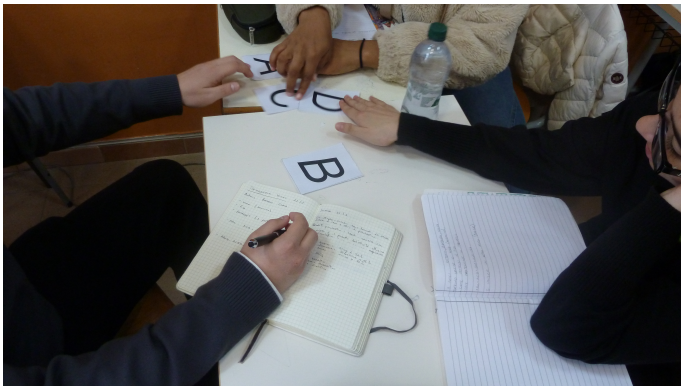


Figura 5.14: G2 ragiona sul quesito (con 4 amici)

I: «quante modalità ci sono per sistemare 4 persone?»

Tutti i gruppi danno 24 come risposta.

I: «come siete arrivati a questa soluzione?»

S1: «il fattoriale, perché sono 4 persone in 4 posti»

S2: «4 per 3 per 2 per 1»

I: «come si collega il fattoriale a questa cosa?»

S3: «perché se io aumento il numero di componenti, aumento il numero di combinazioni, quindi moltiplicandoli per quelli precedenti.. quindi più ce ne sono indietro più aumentano le combinazioni»

S4: «perché moltiplico.. è come se moltiplicassi per tutte le combinazioni possibili.»

Mentre procedevo all'organizzazione della lavagna per sistematizzare i ragionamenti emersi e introdurre formalmente il concetto di fattoriale, si è sviluppato tra gli studenti un confronto spontaneo, caratterizzato da un forte interesse e da un'attiva speculazione cognitiva sulla natura della nuova operazione. La classe ha seguito con estrema attenzione l'esposizione teorica, mostrando una partecipazione propositiva durante i momenti di verifica e rispondendo con prontezza alle sollecitazioni poste.

Per consolidare l'astrazione del concetto, è stato proposto un secondo problema riguardante le scelte di ordinamento, suddividendo tre diversi casi studio tra i gruppi di lavoro. Tale fase ha permesso agli studenti di testare immediatamente l'applicabilità del Calcolo combinatorio appena formalizzato. Dopo alcuni minuti di confronto interno ai gruppi, l'attività è tornata nuovamente in plenaria per la condivisione delle soluzioni.

I: «in ordine alfabetico quanti modi abbiamo di sistemarli?»

G1: «1»

I: «alternanza maschio femmina?»

G2: «8»

I: «perché?»

G2: «perché mettendo per esempio A al primo posto, obbligatoriamente la D deve essere al terzo posto, quindi ci sono due per ognuno. Cioè, per ogni lettera al primo posto ci sono due combinazioni che si ottengono scambiando il secondo e il quarto.»

I: «con Davide in ultima posizione?»

G3: «6»

I: «perché?»

G3: «perché li avevamo scritti e abbiamo visto in quanti D fosse all'ultimo posto e ce ne sono 6»

I: «quindi il discorso qual è? Se io fisso D alla fine..?»

G3: «poi avrò 3 per 2 per 1.»

A seguito delle attività laboratoriali sui problemi analoghi, la discussione è stata ricondotta al Quesito 1 del pre-test.

I: «quando un numero è divisibile per 6?»

S1: «c'era uno schema.. 3, 6,9.. tipo la tabellina del 6»

S2: «quando è divisibile per se stesso e per 1»

S1: «comunque bastava togliere le cifre dispari»

I: «pensate alla tabellina del 6, che caratteristica hanno questi numeri?»

S: «sono pari»

S1: «sono divisibili per 3»

I: «quindi un numero è divisibile per 6 quando..»

S: «è divisibile per 2 e per 3»

I: «tra i nostri numeri di nove cifre quindi scegliamo quelli divisibili per 2 e per 3. La divisibilità per 3 c'è?»

S1: «sì perché la somma delle cifre è divisibile per 3».

I: «ci serve quindi che il numero sia pari: da cosa dipende?»

S: «dalla cifra finale»

I: «quindi, affinché il numero sia pari, tra quali cifre posso scegliere l'ultima cifra?»

S: «tra 4: 2,4,6,8.»

Qui gli studenti iniziano a fare un'approssimazione della probabilità richiesta: "è il 50 per cento", "poco meno della metà", "il quaranta e qualcosa per cento"..

I (alla lavagna): «creiamo questo numero: nell'ultima posizione, abbiamo detto, ne possiamo mettere 4, le altre otto posizioni ci interessano?»

S: «no»

I: «come procediamo quindi?»

S: «prima fissiamo le 4 cifre...» *(si bloccano)*

I: «quante ne rimangono da sistemare?»

S: «8»

I: «come disponiamo queste 8 cifre che rimangono in queste 8 posizioni?»

S: «8 fattoriale»

I: «quindi in totale in numero di numeri divisibili per 6»

S1: «4 fattoriale»

S2: «8 fattoriale»

S3: «4 per 8 fattoriale»

L'ultima fase di questa prima parte è stata dedicata all'introduzione formale del concetto di probabilità in senso classico. Attraverso un coinvolgimento diretto della classe, si è passati dal conteggio dei casi favorevoli alla definizione del rapporto tra questi e i casi possibili.

I: «che cos'è la probabilità?»

S1: «è la possibilità secondo la quale un evento avvenga o no»

S2: «[la probabilità] è la frequenza con cui un evento può succedere»

I: «quindi probabilità alta significa..»

S2: «maggiore frequenza»

I: «ma come facciamo a determinare quant'è la probabilità che quello evento succeda?»

S1: «analizzando tutte le frequenze»

S2: «si divide quello veramente avviene per quello che ehm.. i casi totali, per cento»

S3: «ma questa è la resa percentuale, non c'entra»

A conclusione dell'attività laboratoriale, è stata fornita una definizione rigorosa di probabilità in senso classico. La classe ha dimostrato una ricezione ottimale dei contenuti teorici, rispondendo correttamente ai quesiti applicativi proposti. Durante la trattazione, gli studenti hanno mantenuto un alto livello di attenzione, partecipando attivamente al dialogo educativo e avanzando proposte risolutive coerenti, sia negli esempi strutturati sia nella variante del problema estesa a quattro soggetti.

Il passaggio cruciale è avvenuto durante la discussione della soluzione finale del primo quesito. In questa fase, gli allievi hanno mostrato di aver acquisito la

capacità di distinguere correttamente tra lo spazio campionario (casi possibili) e l'insieme degli esiti favorevoli, superando le ambiguità emerse durante il pre-test.

Sebbene siano state riscontrate inizialmente alcune difficoltà operative nella manipolazione dei fattoriali, l'applicazione della definizione formale ha permesso agli studenti di comprendere ed eseguire autonomamente le semplificazioni algebriche necessarie. Tale competenza ha consentito loro di giungere alla determinazione della probabilità richiesta senza dover ricorrere allo sviluppo esteso dei calcoli, dimostrando una transizione efficace dal calcolo aritmetico alla modellizzazione matematica consapevole.

Seconda parte. I successivi quarantacinque minuti dell'incontro sono stati dedicati all'approfondimento del secondo quesito del pre-test. In questa fase, la metodologia didattica ha subito una variazione rispetto alla prima parte, privilegiando un approccio empirico-sperimentale basato sull'interazione tra manipolazione fisica e simulazione digitale.



Figura 5.15: Urna fisica

L'attività è iniziata con l'ausilio di un'urna fisica. Gli studenti, a turno, hanno effettuato una serie di estrazioni, mentre un compagno procedeva alla registrazione sistematica degli esiti su un foglio di lavoro. La composizione dell'urna è stata variata progressivamente per osservare il mutamento delle frequenze relative.

> I: ≪Consideriamo un'urna vuota e mettiamo al suo interno due palline blu e quattro rosse. Secondo voi viene estratta una pallina blu o una

pallina rossa?»

S1: «Rossa.»

S2: «Rossa.»

A turno gli studenti estraggono una pallina dall'urna. Nonostante la convinzione iniziale, si ottengono 5 palline blu e 6 palline rosse, esito che genera stupore nel gruppo.

S3: «Vabbè, ma comunque la probabilità si fa su casi infiniti.»



Figura 5.16: Estrazione da un'urna fisica

L'ultima osservazione ha permesso di introdurre intuitivamente l'approccio frequentista alla Probabilità. Il conflitto cognitivo scaturito dalla discrepanza tra l'aspettativa (basata sulla probabilità classica) e l'esito sperimentale ha favorito una riflessione profonda sul concetto che un evento «più probabile» non sia necessariamente un evento «certo».

Successivamente, l'attenzione è stata ricondotta al testo del secondo quesito. Inizialmente sono state analizzate le probabilità di estrazione dalle due urne come eventi indipendenti, fase in cui gli studenti hanno risposto correttamente dimostrando un buon coinvolgimento. Per superare i limiti dell'estrazione manuale, l'attività si è spostata sull'ambiente di programmazione *Python*, linguaggio già parzialmente noto alla classe.

Attraverso lo script, sono state effettuate simulazioni su larga scala, variando sia la composizione delle urne che il numero di iterazioni. Gli studenti hanno mostrato vivo interesse, partecipando attivamente alla scelta dei parametri di input.

Il confronto tra i risultati della simulazione e le aspettative teoriche ha permesso di avviare una discussione sulla distinzione tra probabilità qualitativa e quantitativa:

I: «Cosa succede con la probabilità qualitativa?»

S1: «È più specifica.»

I: «E quella quantitativa, invece?»

S1: «No aspe, il contrario.»

S2: «Qualitativa è il caso base.. ehm generale..» *(viene interrotto)*

S3: «Quantitativa sui casi specifici.»

Questo scambio evidenzia come, sebbene i concetti fossero stati recepiti a livello intuitivo, persistesse inizialmente un'incertezza terminologica nella distinzione tra la stima soggettiva/ordinale (qualitativa) e la misura numerica rigorosa (quantitativa) della probabilità. La mediazione tecnologica ha fornito il supporto necessario per chiarire tali definizioni, preparando il terreno per l'analisi della dipendenza stocastica.

L'attività è proseguita focalizzandosi specificamente sulle urne descritte nel secondo quesito, utilizzando *Python* per simulare il trasferimento tra i contenitori. In questa fase, gli studenti hanno manifestato una spiccata curiosità non solo per i risultati numerici, ma anche per la struttura logica del codice sorgente, richiedendo di analizzare le istruzioni che governano l'estrazione e l'aggiornamento delle variabili.

Il fulcro della discussione si è spostato sulla dinamica della composizione dell'urna: i ragazzi hanno analizzato come l'inserimento di una pallina prelevata dalla seconda urna modifichi in modo sostanziale lo spazio campionario della prima. Anche in questa analisi abbiamo utilizzato *Python*.

I: «quindi, secondo voi, il colore della pallina che estraiamo dalla seconda urna e inseriamo nella prima altera la probabilità di far uscire una pallina bianca, poi, dalla prima urna?»

S1: «sì perché cambia la percentuale, ehm, il rapporto»

S2: «sì, ma di poco.»

I: «Quindi, se consideriamo l'evento 'estraggo una pallina bianca dalla prima urna' e l'evento 'estraggo una pallina dalla prima urna dopo averne inserita una', sono collegati tra di loro?»

S: «sì.»

I: «quindi il primo evento..?»

S1: «influenza il secondo»

S2: «e il secondo influenza il primo»

S3: «no, il secondo è influenzato dal primo»

I: «non diciamo 'influenzato', ma 'condizionato'.»

A seguito della fase sperimentale, ho proceduto a fornire le definizioni rigorose di eventi indipendenti e di probabilità condizionata, introducendo i relativi teoremi. Durante l'esposizione dei contenuti teorici (lezione frontale), si è riscontrato un calo dei livelli di attenzione della classe, manifestatosi con segnali di stanchezza e conversazioni private. Gli studenti hanno comunque posto diverse domande volte a interpretare correttamente la simbologia utilizzata negli enunciati.

Nonostante la fluttuazione dell'interesse durante la lezione frontale, gli allievi hanno risposto correttamente agli esempi proposti e hanno provveduto alla stesura dei propri appunti. Successivamente, l'attività è tornata sul quesito del pre-test per analizzarne nel dettaglio le casistiche, formalizzandole alla luce dei nuovi concetti. In questa fase di schematizzazione rigorosa, gli studenti hanno mostrato una buona reattività, cercando di applicare i contenuti teorici appena introdotti per la risoluzione del problema.

I: «uno degli eventi 'Marco estrae una pallina nera dalla seconda unra' e 'Marco estrae una pallina bianca dalla seconda urna' deve verificarsi?»

S1: «sì»

I: «perché quando faccio una estrazione..»

S1: «esce una pallina o bianca o nera»

I: «Possono verificarsi contemporaneamente?»

S2: «Sì»

S3: «no, come fanno?»

I: «la pallina o è bianca o è nera, quindi possono?»

S2: «ah, no.»

La lezione è proseguita con l'introduzione di ulteriori costrutti teorici. Dopo circa venticinque minuti dedicati all'analisi del quesito, si è manifestato un calo fisiologico dell'attenzione, segnalato da distrazioni e conversazioni tra i banchi. Tuttavia, gli studenti hanno mostrato una buona capacità di riflessione sui concetti di eventi compatibili ed esaustivi, di cui sono state fornite le definizioni formali attraverso il seguente confronto:

I: «Lanciamo un dado, primo evento "esce il 5", secondo evento "esce il 3". Sono incompatibili? Sono esaustivi?»

S1: «Sono esaustivi.»

S2: «No, sono incompatibili ma non sono esaustivi.»

I: «Perché?»

S3: «Se esce il 4 nessuno dei due eventi si è verificato.»

I: «Lanciamo un dado, il primo evento è "esce un numero pari", il secondo "esce un numero maggiore di 3". Questi?»

S4: «Sono compatibili perché può uscire il 4 che è sia pari che maggiore di 3.»

S3: «O il 6.»

S1: «Non sono esaustivi perché potrebbe uscire l'1.»

I: «Adesso: "esce un numero pari" primo evento, secondo evento "esce un numero dispari o maggiore di 5". Questi?»

S2: «Sono incompatibili perché un numero non può essere sia pari che dispari, ma sono esaustivi.»

S5: «No, ma può essere anche maggiore di 5.»

S2: «Allora non sono incompatibili.»

S3: «Secondo me non sono né incompatibili né esaustivi.»

I: «Qual è la definizione di eventi esaustivi?»

S3: «Almeno uno dei due si verifica.»

I: «E si verifica uno dei due?»

S3: «Sì.»

I: «Quindi sono esaustivi. Sono incompatibili?»

S2: «No, potrebbe uscire 6.»

Si osserva che, nonostante la stanchezza accumulata, la sollecitazione diretta tramite domande e inviti alla riflessione ha prodotto una riattivazione immediata del gruppo classe, che ha partecipato in maniera attiva al dialogo.

L'analisi del quesito si è conclusa con l'enunciazione del teorema della probabilità totale. Nella fase applicativa, gli studenti hanno operato correttamente, seguendo con curiosità e interesse anche la verifica dei risultati effettuata tramite le simulazioni in *Python*.

Educazione civica. I minuti conclusivi dell'incontro sono stati dedicati a una riflessione sul legame tra il calcolo delle probabilità e l'educazione civica. Sebbene la pianificazione originale prevedesse un'attività laboratoriale più estesa con l'ausilio di giochi e urne fisiche, il tempo limitato ha imposto una rimodulazione dell'intervento, focalizzando l'attenzione sui concetti di scommessa e di quota. Nonostante la stanchezza dovuta al termine della sessione, la classe ha mostrato un vivo interesse per l'argomento.

I: «Come si calcolano le quote delle scommesse secondo voi?»

S1: «In base a quale ha maggiore probabilità.»

S2: «In base alle partite precedenti delle squadre.»

S3: «Se una squadra è quotata bassa è perché vince tanto.»

Per approfondire la dinamica, è stata proposta una simulazione basata su un'urna contenente tre palline blu e una rossa, associando rispettivamente le quote di 1.1

e 5. Ipotizzando la puntata di un euro, la quasi totalità degli studenti ha scelto di scommettere sull'esito meno probabile (rosso), attratta dalla quota più alta. Attraverso l'utilizzo di *Python*, sono state simulate diverse estrazioni per rappresentare lo svolgimento degli eventi sportivi, portando i ragazzi a riflettere sul bilancio finale tra perdite e vincite.

L'attività ha permesso di analizzare le ragioni della perdita collettiva, introducendo il concetto di «quota equa» e le modalità con cui i bookmaker fissano i margini di guadagno. È stato sottolineato come la competenza in ambito probabilistico rappresenti uno strumento di tutela per il cittadino, permettendo di identificare quando il gioco non sia equo e, di conseguenza, non conveniente. L'interesse si è riacceso in modo particolare quando è stata presentata la formulazione matematica della quota equa, che alcuni studenti hanno prontamente annotato nei propri appunti.

Questa fase finale ha offerto un'importante occasione di riflessione critica, evidenziando come la padronanza degli strumenti matematici possa fornire una consapevolezza necessaria per affrontare tematiche sociali delicate, quali la prevenzione del gioco d'azzardo patologico.

5.2.3 Terzo incontro

Il terzo incontro si è tenuto in data 16 aprile 2026, dalle ore 9:15 alle ore 10:15, con la partecipazione di 13 studenti. Tra i presenti, due allievi prendevano parte al progetto per la prima volta, non avendo dunque sostenuto il pre-test né partecipato al secondo incontro; di questi, uno ha consegnato l'elaborato in bianco, mentre l'altro ha tentato una risoluzione senza tuttavia giungere a conclusioni significative.

Durante questa sessione, la classe ha manifestato una certa irrequietezza e una disposizione meno collaborativa rispetto agli incontri precedenti. Gli studenti sono apparsi distratti, verosimilmente a causa del carico di verifiche previsto per le ore successive. Ciononostante, durante la somministrazione del test finale, il gruppo ha lavorato con impegno, sebbene siano emerse frequenti interazioni tra i banchi e richieste di chiarimento rivolte al docente. Dall'analisi degli elaborati è emersa una

prevalenza di risultati numerici privi di un'esplicita argomentazione teorica, suggerendo che parte degli esiti possa essere derivata dal confronto informale avvenuto durante la prova.

La somministrazione ha occupato circa 45 minuti della lezione. Nel tempo residuo è stata avviata una discussione per raccogliere le impressioni a caldo degli studenti, i cui pareri sono risultati eterogenei: parte della classe ha definito i quesiti «un po' complessi», mentre altri li hanno considerati «fattibili» o «fattibili con un aiutino». In termini generali, si è riscontrata un'evoluzione positiva nelle strategie risolutive e una maggiore consapevolezza dei concetti probabilistici. Un dato rilevante riguarda la formalizzazione della probabilità: a differenza del pretest, la totalità degli studenti ha espresso il valore numerico nell'intervallo $[0, 1]$, abbandonando la rappresentazione percentuale. È emersa inoltre una migliore capacità di identificare gli elementi teorici necessari alla risoluzione dei problemi, come confermato dal seguente scambio:

> I: «Avete individuato degli elementi teorici tra quelli analizzati la scorsa volta?»
>
> S: «Sì.»
>
> I: «Quali, ad esempio?»
>
> S1: «Probabilità condizionata.»
>
> S2: «Eventi esaustivi, incompatibili, indipendenti.»

Analisi del primo quesito. L'analisi degli elaborati ha evidenziato che ben 9 studenti su 13 hanno risolto correttamente il quesito, dimostrando una buona padronanza sia dei concetti di permutazione semplice che della definizione classica di probabilità. Dal punto di vista metodologico, alcuni allievi hanno adottato un approccio visivo-intuitivo, ricorrendo alla redazione di schemi grafici in cui le diverse posizioni della sequenza *LATO* venivano variate manualmente per comprendere la dinamica combinatoria sottesa al problema.

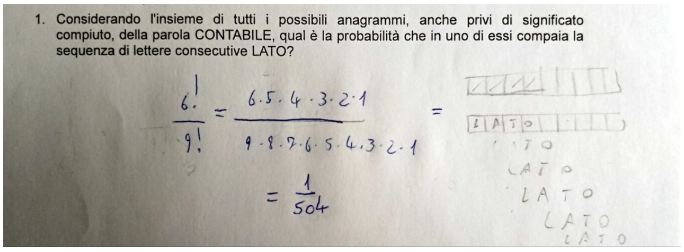


Figura 5.17: Utilizzo di schemi per visualizzare le posizioni della sequenza LATO

In generale, la classe ha operato in autonomia, non riscontrando particolari ostacoli nella determinazione dei casi possibili (9!). Maggiori incertezze sono emerse, invece, nel calcolo dei casi favorevoli. A fronte di tali difficoltà, si è reso necessario un intervento didattico mirato: attraverso il suggerimento di trattare la sequenza *LATO* come un unico blocco unitario, gli studenti sono stati messi in condizione di rielaborare il problema correttamente, riconducendolo a una permutazione di 6 elementi.

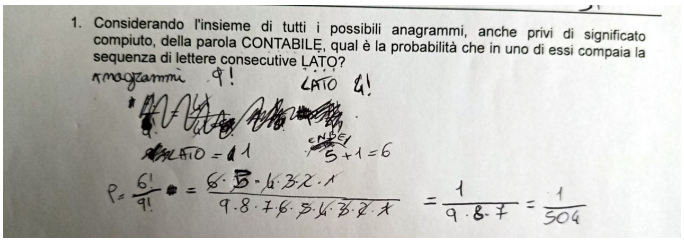


Figura 5.18: Operazioni con il fattoriale

Un ulteriore punto di discussione è nato dalla gestione del calcolo dei fattoriali; alcuni studenti hanno manifestato perplessità di fronte all'ordine di grandezza dei numeri ottenuti, percepiti come eccessivamente «grandi». Tuttavia, partendo dalla definizione ricorsiva di fattoriale, è stato possibile guidare gli allievi verso una semplificazione algebrica del rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, giungendo così al risultato finale in forma frazionaria.

Analisi del secondo quesito. Il secondo quesito è stato quello che ha riscosso il maggior interesse da parte del campione: ad eccezione di un solo studente, l'intero gruppo ha tentato la risoluzione, con dieci allievi che sono giunti alla risposta corretta, limitatamente alla prima parte del problema. La criticità principale è emersa

nell'interpretazione del passaggio testuale «si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina». Inizialmente, alcuni studenti hanno ipotizzato di poter determinare la probabilità totale semplicemente rapportando la somma di tutte le palline rosse alla somma di tutte le palline presenti nelle tre urne.

Per superare tale ambiguità interpretativa, sono stati proposti due stimoli riflessivi: «Da dove può essere estratta la pallina?» e «In base all'urna scelta, cambia la probabilità che esca una pallina rossa?». Tali interrogativi hanno permesso a uno studente di identificare correttamente la struttura logica del problema esclamando: «Allora è probabilità condizionata!». Superata questa fase di incertezza, la classe ha operato correttamente; si osserva, tuttavia, che mentre alcuni hanno esplicitato il percorso logico seguito, altri si sono limitati a riportare lo sviluppo numerico senza motivare i passaggi.

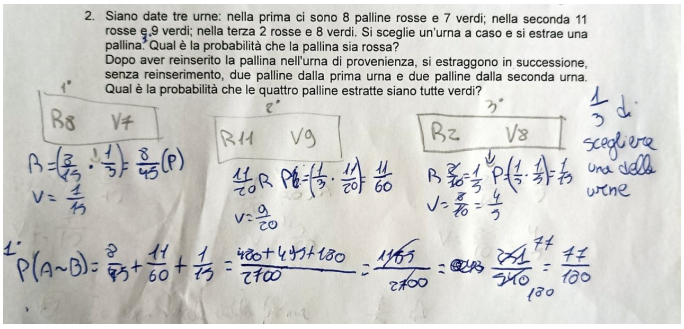


Figura 5.19: Risoluzione del secondo quesito dettagliata

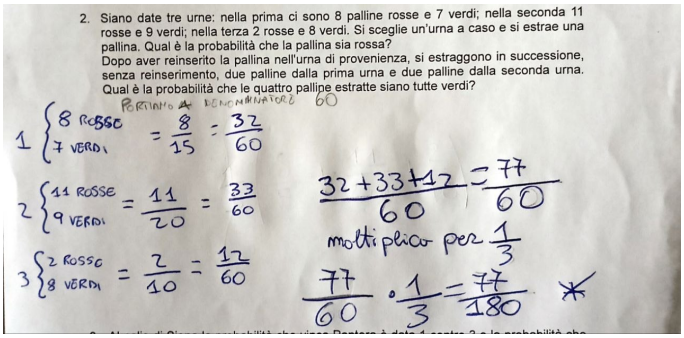


Figura 5.20: Risoluzione del secondo quesito (solo sviluppo numerico)

Per quanto concerne la sezione "bonus" del quesito, solo tre studenti hanno tentato la risoluzione, adottando strategie differenti:

- Il primo studente ha raggiunto la conclusione corretta, pur omettendo totalmente l'argomentazione teorica a supporto dei calcoli riportati.

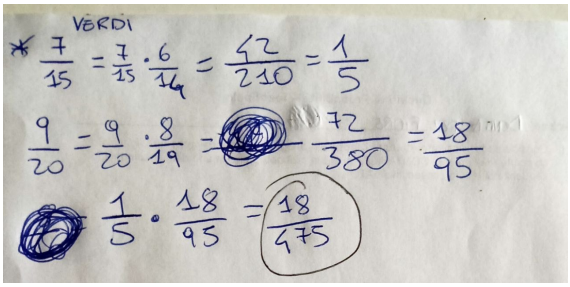


Figura 5.21: Risoluzione parte "bonus" (solo calcoli)

- Il secondo ha analizzato correttamente le estrazioni all'interno delle singole urne, tenendo conto della dipendenza stocastica derivante dal non reinserimento delle palline, ma non è riuscito a finalizzare l'esercizio, omettendo di considerare l'intersezione totale dei quattro eventi.

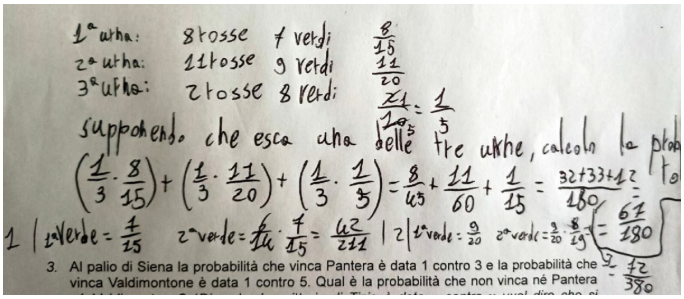


Figura 5.22: Risoluzione parte "bonus" senza considerare l'intersezione di tutti gli eventi

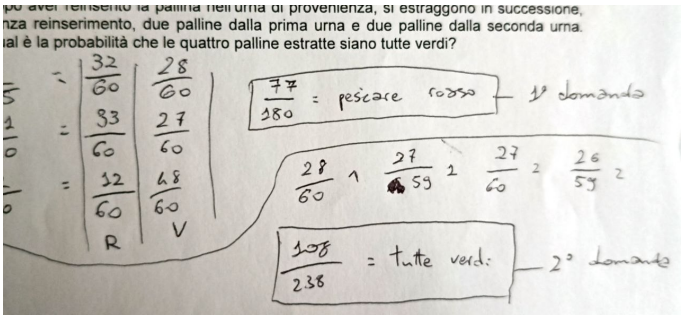


Figura 5.23: Risoluzione parte "bonus" attraverso l'unione degli eventi

- Il terzo ha parimenti riconosciuto la dipendenza tra gli eventi e ha tentato di integrare i quattro stadi dell'estrazione; tuttavia, nel calcolo della probabilità

complessiva, ha erroneamente applicato il principio della somma anziché quello del prodotto per la probabilità di eventi indipendenti (tra le urne) e composti.

Analisi del terzo quesito. Il terzo quesito non è stato affrontato dall'intero campione; solo quattro studenti hanno tentato la risoluzione, giustificando tale scelta con la mancanza di tempo residuo e dichiarando che «il secondo quesito ha richiesto molto impegno». Tra coloro che si sono cimentati nell'esercizio, l'esito è stato generalmente positivo: fatta eccezione per un allievo che, dopo un corretto avvio, è incorso in errori procedurali, i restanti hanno raggiunto la soluzione esatta.

Tuttavia, è emersa una lacuna sul piano della formalizzazione logica: nessuno degli studenti ha esplicitato il ragionamento teorico che giustifica il passaggio all'evento complementare (o evento contrario) per la determinazione della probabilità richiesta. Sebbene tale strategia risolutiva fosse stata accennata e discussa durante il secondo incontro come approccio preferenziale per questo tipo di problemi, gli elaborati hanno riportato esclusivamente i passaggi numerici, confermando una persistente difficoltà nel documentare le scelte strategiche e i legami logici tra i concetti appresi.

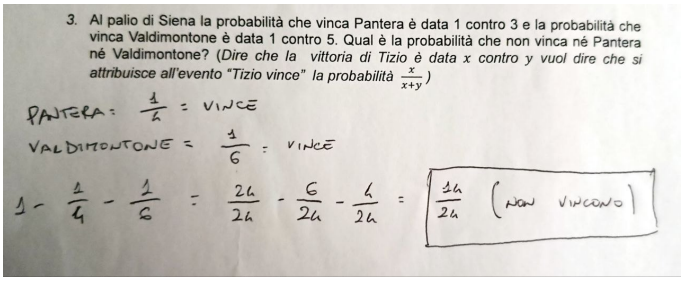


Figura 5.24: Risoluzione del terzo quesito

5.3 Risultati del questionario

A conclusione del percorso didattico, è stato somministrato agli studenti un questionario di gradimento tramite la piattaforma *Google Moduli*. Hanno risposto complessivamente 10 studenti, la cui frequenza agli incontri è stata così distribuita: 7

hanno partecipato all'intero ciclo di tre incontri, due hanno presenziato al primo e al terzo, mentre uno studente ha partecipato esclusivamente al secondo e al terzo appuntamento.

Per quanto riguarda il background disciplinare, i dati mostrano un panorama eterogeneo: 5 studenti dichiaravano di possedere già alcune conoscenze di base in materia di probabilità, 4 non ne avevano alcuna e solo uno studente riteneva di avere una conoscenza consolidata prima dell'attività.

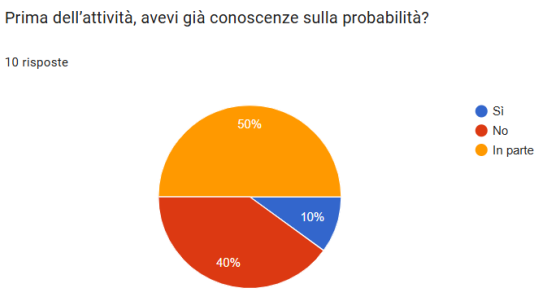


Figura 5.25: Risultati D2

Ai partecipanti che hanno sostenuto il primo incontro è stato chiesto di indicare le principali criticità riscontrate nel pre-test. Le risposte hanno evidenziato una difficoltà generalizzata legata alla mancanza di formalismi teorici: molti hanno lamentato la mancata conoscenza delle formule e dei teoremi, limitandosi a esperienze pregresse su casi molto specifici. Altri hanno sottolineato difficoltà nel determinare i casi possibili, nell'affrontare il concetto di fattoriale o, più genericamente, nel comprendere «su cosa e come fare la probabilità».

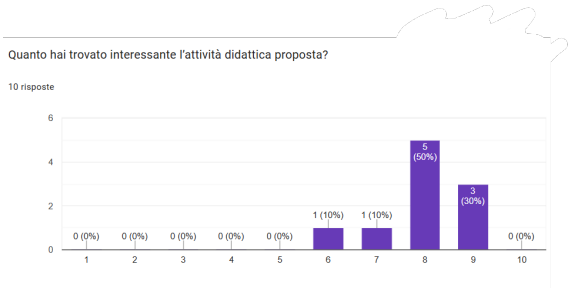


Figura 5.26: Risultati D4

Il gradimento complessivo dell'attività è risultato ampiamente positivo. Alla domanda «Quanto hai trovato interessante l'attività didattica proposta?», le valutazioni (su scala 1-10) non hanno registrato insufficienze: uno studente ha espresso un voto pari a 6, uno pari a 7, tre hanno assegnato 9 e cinque studenti hanno optato per un 8.

In merito al secondo incontro, gli otto studenti presenti hanno risposto alla domanda aperta: «Le attività proposte al secondo incontro ti hanno coinvolto? Perché?». I feedback evidenziano il valore metodologico dell'approccio laboratoriale:

- «Sì, mi hanno coinvolto moltissimo perché è stato un modo per mettere in gioco la mia mente su cose nuove e quindi anche un nuovo modo per sviluppare la mia logica»;
- «Coinvolgenti, sono riuscito a capire come si svolgevano i precedenti problemi attraverso il lavoro di gruppo»;
- «Sì, perché viene sollecitata continuamente l'attenzione della classe»;
- «Si, perché mi hanno fatto capire la vastità delle varietà di posizioni che si possono trovare attraverso la probabilità»;
- «Sono state coinvolgenti perché interattive, non è stata una semplice lezione di spiegazione ma ha coinvolto tutti»;
- «Sì, perché trovo molto interessante l'argomento, soprattutto applicato nella realtà»;
- «Sono state molto interessanti e mi hanno preso molto, è stato molto bello scegliere il nome dell'azienda dei 3 amici»;
- «Sì, mi hanno coinvolta molto, perché grazie a queste attività ho capito meglio l'argomento».

Analizzando le specifiche attività del secondo incontro, il «Laboratorio in gruppo» è risultato l'elemento di maggior successo (6 preferenze), seguito dall'«Estrazione da un'urna fisica» (5), «Probabilità e scommesse» (3), «Confronto e condivisione dei risultati in plenaria» (2) e «Laboratorio su Python» (2). Nessuna preferenza è stata accordata alla «Risoluzione del quesito in plenaria» e al «Contenuto teorico». Di seguito si riporta il dettaglio delle scelte individuali, incrociando le motivazioni di preferenza con le attività meno apprezzate:

1. Ha apprezzato *Probabilità e scommesse* poiché ritenute utili per il futuro. Ha gradito meno l'estrazione fisica, ritenendo che «banalizza il concetto e non è detto che i risultati ottenuti siano quelli che ci aspettiamo».

2. Ha scelto le attività pratiche (*Urna* e *Scommesse*) perché rendono lo studente «parte dell'avvenimento», mentre ha sofferto il *Contenuto teorico* per la difficoltà di memorizzazione delle formule.

3. Ha indicato il *Lavoro di gruppo*, l'*Urna* e *Python* come strumenti facilitatori della comprensione, preferendoli alla sola *Teoria*, definita fonte di confusione.

4. Ha privilegiato il *Gruppo*, la *Plenaria* e l'*Urna* per il confronto generato. Ha apprezzato meno «quello sul contenuto teorico perche ho avuto difficoltà a seguire nonostante la spiegazione era fatta bene e le formule mi hanno messo molta confusione».

5. Ha votato per il *Gruppo*, l'*Urna* e *Python* definendoli stimoli per un apprendimento coinvolgente.

6. Ha scelto il *Gruppo* e le *Scommesse* per l'interesse verso i meccanismi dei centri scommesse e del gioco d'azzardo; non ha indicato attività meno gradite.

7. Ha preferito *Gruppo*, *Plenaria* e *Urna* per il coinvolgimento, dichiarando di aver compreso meno l'attività su *Python* «perché non l'ho capita benissimo»..

8. Ha indicato il *Laboratorio di gruppo* per il valore del confronto nella risoluzione dei problemi, preferendolo all'estrazione fisica.

Il ruolo della socializzazione dell'apprendimento è emerso con forza nelle risposte riguardanti l'influenza del lavoro di gruppo: la maggior parte degli studenti lo ha definito stimolante, piacevole e fondamentale per completare l'attività attraverso esempi concreti. Solo una voce fuori dal coro ha segnalato un peggioramento dell'esperienza dovuto alla bassa attenzione dei compagni.

Relativamente alla coerenza tra pratica e teoria, gli studenti hanno confermato la validità del nesso: molti hanno ammesso che «senza la teoria non sarei riuscito a svolgere i quesiti» e che le attività pratiche «spiegavano bene la teoria».

In termini di partecipazione attiva, il 50% del campione si è sentito «molto» coinvolto e il 30% «abbastanza». Due studenti hanno risposto «poco», sebbene i commenti aperti evidenzino un clima inclusivo (es. «Mi sono sentita ascoltata», «Il professore mi coinvolgeva attraverso domande»).

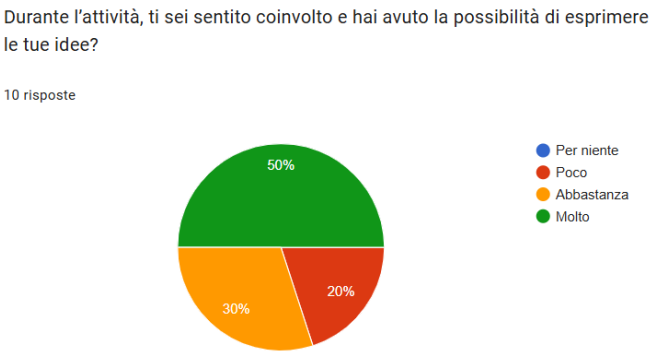


Figura 5.27: Risultati D11

Circa l'utilità del percorso per il test finale, le opinioni sono state sincere: se per alcuni è stata «utilissima soprattutto per quello delle urne», altri hanno ammesso che la mancanza di studio individuale delle formule ha limitato i benefici del laboratorio.

Infine, interrogati sulla trasferibilità di questa metodologia ad altri ambiti della matematica, gli studenti hanno risposto positivamente, vedendo in questo approccio

un modo per «mettere in gioco i ragazzi» e rendere meno noiose materie complesse. Tra gli argomenti suggeriti per future applicazioni spiccano la geometria analitica (retta e parabola) e il calcolo combinatorio (fattoriale).

Capitolo 6

Conclusioni

A completamento della presente esperienza sperimentale, è possibile affermare con certezza che l'assunzione di una postura riflessiva da parte del docente rappresenti una strategia imprescindibile per innalzare la qualità della proposta didattica. Come emerso nel corso dell'intero progetto, laddove l'insegnante non si limiti alla mera valutazione del prodotto scolastico ma integri la funzione di ricercatore in classe, si assiste a un miglioramento sensibile sia delle strategie di insegnamento sia dei processi di apprendimento degli studenti.

Ripercorrendo le fasi del percorso, si osserva come un intervento didattico strutturato su metodologie attive e distanti dalla lezione frontale tradizionale abbia suscitato un vivo interesse, favorendo un coinvolgimento profondo della classe. I dati raccolti nella fase iniziale attraverso il *pre-test* avevano evidenziato una carenza diffusa nelle conoscenze di base del calcolo delle probabilità. Gli errori rilevati, discussi nei capitoli precedenti, non erano imputabili soltanto a lacune mnemoniche, ma riflettevano fragilità concettuali e un'incapacità di applicare il ragionamento intuitivo a problemi di incertezza; solo una minima parte del campione era riuscita, infatti, a risolvere i quesiti proposti.

Il secondo incontro ha confermato l'efficacia del Laboratorio di Matematica come ambiente di apprendimento. L'adozione del *collaborative learning* e del lavoro di gruppo ha favorito una dinamica relazionale positiva, mentre la discussione in

plenaria si è rivelata il momento cardine per la condivisione dei processi risolutivi. In questa fase, il confronto sui risultati ha permesso agli studenti di riflettere criticamente sugli errori commessi e ha consentito al docente di operare come mediatore nel processo di rielaborazione concettuale. L'integrazione di artefatti fisici e supporti informatici (quali l'uso di *Python*) ha alimentato la motivazione intrinseca degli studenti. Al contrario, si è riscontrato un calo fisiologico dell'attenzione durante i momenti di spiegazione teorica frontale dei teoremi, prontamente recuperato non appena la lezione tornava a essere partecipata attraverso esempi e stimoli diretti. Tale fenomeno conferma l'esigenza, teorizzata da Vygotskij, di un clima di classe positivo e di una dimensione sociale dell'apprendimento in cui lo studente è parte attiva. Anche il modulo dedicato all'Educazione civica e ai rischi del gioco d'azzardo ha riscosso grande successo, rispondendo alla necessità di formare cittadini consapevoli in linea con le *Competenze chiave per l'apprendimento permanente* (2018).

L'efficacia dell'attività laboratoriale ha trovato riscontro tangibile negli esiti del *test finale*. Sebbene persistano alcune tentazioni nel ricadere in automatismi errati, molte delle misconcezioni rilevate inizialmente sono state superate. Gli studenti hanno dimostrato di saper operare correttamente con i fattoriali, riconoscere le relazioni insiemistiche e applicare i teoremi della probabilità, abbandonando l'uso improprio di proporzioni o medie aritmetiche per il calcolo delle probabilità. Nonostante alcune incertezze residue — riconducibili al limitato tempo dedicato allo studio individuale, come confermato dal questionario finale — l'incremento delle conoscenze e delle competenze è stato significativo.

In conclusione, questa ricerca suggerisce che non sia necessaria una rivoluzione radicale dei metodi di insegnamento, quanto piuttosto una cura consapevole della progettazione didattica. Il Laboratorio di Matematica, con i suoi strumenti e le sue metodologie inclusive, si configura come un eccellente dispositivo per affiancare la lezione frontale, rendendo la sua proposta interattiva e significativa. In ultima analisi, come sostenuto da Rosetta Zan, risulta fondamentale porsi in ascolto degli

studenti, coinvolgendoli nei processi di ragionamento e valorizzando l'errore e la misconcezione come tappe cruciali per una reale ristrutturazione del sapere, da perseguire sempre attraverso il confronto tra pari.

Ringraziamenti

Lavorare a questa tesi è stato per me motivo di orgoglio e un piacere difficile da descrivere a parole. Se è stato possibile concludere questo lavoro, il merito è di alcune persone che è doveroso ringraziare.

Innanzitutto, rivolgo un sentito ringraziamento alla mia relatrice, la Professoressa Maria Flavia Mammana, che ha creduto in questo progetto sin dall'inizio e ne ha accolto l'idea con disponibilità ed entusiasmo, accompagnandomi lungo tutto il percorso con professionalità e dedizione. I suoi consigli sono stati preziosi e le sono grato per avermi permesso di concretizzare questa idea.

Un grazie particolare va alla Professoressa Valeria Cannia per avermi permesso di condurre la sperimentazione in classe. Il suo supporto è stato fondamentale nel trovare spunti per l'attività didattica, specialmente durante il periodo di tirocinio curriculare svolto sotto la sua guida. Sono stati mesi di confronto che mi hanno insegnato molto, permettendomi di vivere da vicino le dinamiche dell'affascinante mondo dell'insegnamento. Estendo i ringraziamenti ai suoi alunni, che in un certo senso sono stati i miei primi studenti: ricorderò con gioia ed emozione i loro sguardi curiosi durante le attività. In particolare, ringrazio i ragazzi della classe terza, che hanno partecipato con serietà e proattività alla fase di sperimentazione, permettendomi di svolgere al meglio questo lavoro.

Desidero inoltre ringraziare le persone che, sebbene non abbiano contribuito in senso stretto alla stesura dell'elaborato, sono state fondamentali per il loro sostegno durante questa fase e, più in generale, lungo tutto il mio percorso universitario.

I miei genitori sono stati una presenza preziosa, attenta e costante. Hanno sempre

creduto in me e sostenuto le mie scelte, anche quelle che mi portavano lontano da casa, rispettando i miei tempi e le mie esigenze.

Mio fratello è, per tutto, il "numero uno". La matematica ci unisce sempre di più (e ci isola dai nostri genitori durante i pranzi); è una grande fortuna essere cresciuti insieme e poter condividere passioni, interessi e idee.

I miei parenti e i miei amici sono coloro che rendono ricca la mia vita quotidiana. Il loro sostegno e la loro comprensione sono una spinta costante per andare avanti; la loro stima è il supporto necessario per continuare a credere in ciò che faccio, e il loro affetto il motivo per cui non mi sento mai solo. Grazie.

I miei colleghi sono stati la parte viva di questo cammino. Presenti dall'inizio alla fine, sono diventati una parte essenziale della mia vita: colleghi una volta, amici per sempre.

L'Erasmus ha rappresentato la parentesi più bella della mia carriera universitaria. Se Aveiro è stata la città che mi ha accolto e mi ha dato l'opportunità di crescere, le persone con cui l'ho vissuta l'hanno resa casa. Grazie per essere stati famiglia quando casa e famiglia erano lontani.

L'associazione "Traynante" e il Gruppo Scout Troina 1 sono i luoghi in cui il mio cuore risiede e l'anima riposa. Non ho difficoltà a dire che è anche merito di queste realtà se ho portato a compimento questa tesi: riescono a migliorarmi ogni giorno attraverso il confronto e le relazioni. Spero che tutto ciò che ho ricevuto in questi anni possa, un giorno, essere messo a disposizione degli studenti che incontrerò. *"Non per me, ma per i miei ragazzi"* non è solo una frase, ma un modo di vivere la vita in ogni suo aspetto, e sono grato a queste due realtà per permettermi di sperimentarlo quotidianamente.

Siamo giunti alla fine di questo percorso. Sono grato per tutto ciò che è stato, per le persone che ho incontrato, per i luoghi che ho vissuto e per le esperienze che ho fatto. Grazie Università degli Studi di Catania: sei stata una pagina bellissima della mia vita, ma sono pronto a scriverne altre.

Ah, grazie di tutto Laura: sei stata essenziale.

Bibliografia

[1] G. Aleo, G. Fasciano, D. Ferrarello, G. Inturri, M. F. Mammana, B. Micale, G. Pappalardo, and M. Pennisi, *20 anni di etniade matematica*, CULC, Catania, 2011.

[2] G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, and O. Robutti, *Matematica 2003. un nuovo curricolo di matematica per la scuola secondaria*, Progetto Matematica 2003, MIUR - UMI-CIIM, 2003, Consultato il 30 aprile 2026.

[3] Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, and Anna Trifone, *Matematica.blu 2.0. vol. 4: Logaritmica, trigonometria, probabilità*, 2 ed., Zanichelli, Bologna, 2021.

[4] A. L. Brown, *Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms*, Metacognition, motivation and understanding (F. E. Weinert and R. H. Kluwe, eds.), Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New York, 1987, pp. 65–119.

[5] J. C. Campione and A. L. Brown, *Toward a theory of intelligence. contribution from research with retarded children*, Handbook of child psychology (P. H. Mussen, ed.), vol. 3, John Wiley, New York, 1987, pp. 77–166.

[6] Centro Morin, *Breve storia della probabilità*, n.d., Consultato il 30 aprile 2026.

[7] G. Chiari, *Climi di classe e apprendimento*, Franco Angeli, Milano, 1994.

[8] J. Clement, *Algebra word problems solutions: thought processes underlying a common misconception*, Journal for Research in Mathematics Education **13** (1982), 36–46.

[9] E. G. Cohen, *Organizzare i gruppi cooperativi. ruoli, funzioni, attività*, Erickson, Trento, 1999.

[10] Consiglio dell'Unione Europea, *Raccomandazione del consiglio del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente*, 2018, 2018/C 189/01. Consultato il 30 aprile 2026.

[11] Bruno D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna, 1999.

[12] Bruno D'Amore and S. Sbaragli, *Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione"*, La matematica e la sua didattica **2** (2005), 139–163.

[13] C. Di Pietro, D. Ferrarello, G. Inturri, M. F. Mammana, S. Messina, M. Pennisi, and A. Taranto, *Altri 10 anni di etniade matematica*, Catania University Press, Catania, 2021.

[14] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, 3 ed., vol. 1, Wiley, New York, 1968.

[15] J. H. Flavell, *Metacognitive aspects of problem solving*, The nature of intelligence (L. B. Resnick, ed.), Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New York, 1976, pp. 231–235.

[16] R. M. Gagné, *The conditions of learning*, Rinehart e Winston, New York, 1970.

[17] Howard Gardner, *Educare al comprendere. stereotipi infantili e apprendimento scolastico*, Feltrinelli, Milano, 1993, I ed. originale USA 1991.

[18] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, Addison-Wesley, 1994.

[19] C. Kieran, *Concepts associated with the equality symbol*, Educational Studies in Mathematics **12** (1981), 317–326.

[20] ———, *Relationships between novices' views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures*, Proceedings of the fifth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (J. C. Bergeron and N. Herscovics, eds.), vol. 1, University of Montreal, 1983, pp. 161–168.

[21] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Dissertatio de arte combinatoria*, Fick, Lipsia, 1666.

[22] Kurt Lewin, *Principi di psicologia topologica*, O.S., Firenze, 1961, Ed. originale: Principles of topological psychology, McGraw, New York, 1936. Trad. it. a cura di Ossicini A.

[23] M. McCloskey, *Intuitive physics*, Scientific American (1983), 114–122.

[24] Lidio Miato, *Le buone pratiche inclusive della scuola elementare trentina*, 2001, Consultato il 30 aprile 2026.

[25] Ministero dell'Istruzione e del Merito, *Linee guida per l'insegnamento dell'educazione civica*, 2024, Consultato il 30 aprile 2026.

[26] MIUR, *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i percorsi liceali*, 2010, D.M. n. 211 del 7 ottobre 2010.

[27] ———, *Linee guida per l'insegnamento dell'educazione civica*, 2020, Ai sensi dell'articolo 3 della legge 20 agosto 2019, n. 92.

[28] OILER, *Urne e scommesse*, OILER Scuola. `https://oiler.education/scuola/materiali/primaria/pingo/304/scommesse-quote-e-probabilita`, s.d.

[29] Alfio Ragusa and Salvatore Giuffrida, *Corso di algebra. teoria ed esercizi*, Aracne, Roma, 2010.

[30] S. Sbaragli, *Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili"*, La matematica e la sua didattica **1** (2005), 57–71.

[31] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York, 1985.

[32] J. M. Shaughnessy, *Problem-solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance*, Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (E. A. Silver, ed.), Lawrence Erlbaum, Hillsdale, N.J., 1985, pp. 399–415.

[33] E. A. Silver, *Research on teaching mathematical problem solving: some under represented themes and needed directions*, Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (E. A. Silver, ed.), Lawrence Erlbaum, Hillsdale, N.J., 1985, pp. 247–266.

[34] Sergio Tiziano, *Certissimo, certo... praticamente probabile*, Sciascia, Caltanissetta-Roma, 2025.

[35] UMI-CIIM, *Matematica per il cittadino*, 2003, Sito ufficiale del progetto. Consultato il 30 aprile 2026.

[36] L. S. Vygotskij, *Pensiero e linguaggio*, Giunti-Barbera / Laterza, Firenze / Roma, 1966, Edizione originale 1934. Trad. it. Giunti-Barbera 1966 o Laterza 1990.

[37] S. Wagner, *Conservation of equation and function under transformations of variable*, Journal for Research in Mathematics Education **12** (1981), 107–118.

[38] ———, *What are these things called variables?*, Mathematics Teacher **76** (1983), 474–479.

[39] R. Zan, *Verso una teoria per le difficoltà in matematica. contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica*, 2002, Materiale del Seminario Nazionale 2002.