



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Innovazione didattica attraverso il liceo matematico.
Percorsi interdisciplinari con un approccio storico.

Scuola di Dottorato in Storia e Didattica della Matematica
Dottorato di Ricerca in Matematica (XXXVII ciclo)

Francesca Coppa

Matricola 770326

Relatore
Prof.ssa Marta Menghini

Correlatore
Prof. Claudio Bernardi

Anno Accademico 2023/2024

Tesi discussa

**Innovazione didattica attraverso il liceo matematico. Percorsi interdisciplinari
con un approccio storico.**

PhD thesis. Sapienza Università di Roma

© 2024 Francesca Coppa. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con $\text{\LaTeX}$ e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: francesca.coppa@uniroma1.it

*Dedicato a
Rita e Michele*

Indice

1	Presentazione del lavoro di ricerca	1
1.1	Lo scenario: Il liceo matematico	1
1.2	Motivazioni e obiettivi di ricerca	2
1.3	Struttura del lavoro	4
2	Il liceo matematico	7
2.1	Come si attiva un percorso di liceo matematico nelle scuole	8
2.2	Processo di costruzione di liceo matematico nella scuola	9
2.3	Il lavoro sull'archivio del liceo matematico	13
2.4	Stato ed evoluzione del Liceo matematico	15
3	I quadri teorici di riferimento	19
3.1	Costrutti di riferimento per la conduzione delle attività didattiche .	19
3.1.1	I principi filosofici dell'Inquiry Based education	20
3.1.2	L'Inquiry Based Education nella prospettiva scientifica e in particolare della matematica Inquire Based Mathematical Education	23
3.2	Il ruolo della storia della matematica nella didattica	25
3.2.1	I <i>why</i> e gli <i>how</i> nell'uso della storia della matematica	27
3.2.2	Le finalità e gli effetti dell'uso della storia della matematica .	29
3.3	L'interdisciplinarietà tra matematica e altri saperi	31
3.4	Evoluzione delle prasseologie nell'educazione matematica	35
3.5	Atteggiamenti, convinzioni ed emozioni nella didattica della matematica	39
4	Strumenti di supporto alla didattica della matematica	45
4.1	Il software di geometria dinamica GeoGebra come strumento didattico	46
5	Proposta di un percorso didattico interdisciplinare tra latino e matematica	49
5.1	L'importanza di percorsi interdisciplinari tra latino e matematica . .	49
5.2	Il workshop latino e matematica nella scuola secondaria di secondo grado. I edizione	51
5.3	Il percorso didattico sulla Brachistocrona	55
5.4	Il problema della Brachistocrona	57
5.5	La progettazione del percorso didattico	59
5.6	La metodologia	59
5.6.1	Il libro GeoGebra di supporto al percorso didattico	61

5.7	Modulo 1. Introduzione del problema e proposta di risoluzione da parte di Galilei	63
5.7.1	Attività 1. La curva che risolve il problema	63
5.7.2	Attività 2. Introduzione ai Discorsi e dimostrazioni di Galilei	65
5.7.3	Attività 2. Presentazione dell'idea risolutiva di Galilei	68
5.7.4	Attività 2. Alcune riflessioni sul latino di Galilei	69
5.7.5	Attività 3. Analisi del teorema IV del <i>De moto aequabile</i> , giornata terza e dei teoremi I-III, V, VI e XIX del <i>De motu naturaliter accelerato</i> , giornata terza.	70
5.7.6	Attività 4: Analisi del Teorema XXII	88
5.7.7	Attività 4: Analisi dello Scholium	92
5.8	Modulo 2: La sfida lanciata da Johann Bernoulli: due proposte di risoluzione	95
5.8.1	Attività 1: La sfida di Johann e la sua proposta di risoluzione	95
5.8.2	Attività 2: La sfida di Jakob e la sua proposta di risoluzione	108
5.9	Modulo 3: Novissima dissertatio discipulorum	115
5.9.1	Attività 1: Rielaborazione attiva da parte degli studenti	115
5.9.2	Attività 2: Il dibattito	116
5.9.3	Attività 3: Riflessioni e adattamento del percorso	116
5.10	Riflessioni su una esperienza didattica	119
5.10.1	La sperimentazione in aula	119
5.10.2	Il ritorno da parte degli studenti	120
5.10.3	Riproducibilità in aula da parte dei docenti	121
6	Proposta di un percorso didattico secondo un approccio storico: Il concetto di covariazione a partire dall'algebra dei segmenti di Cartesio	123
6.1	Contesto	124
6.2	Progettazione del percorso didattico	127
6.3	La metodologia	128
6.3.1	Il libro GeoGebra di supporto al percorso didattico	128
6.4	I moduli didattici	132
6.4.1	Esploriamo con le mani	132
6.4.2	Esploriamo con GeoGebra: Covariazione	132
6.4.3	Esploriamo con GeoGebra: Algebra dei Segmenti	135
6.4.4	I luoghi geometrici	138
6.5	Indicazioni operative per la guida alla risoluzione delle proposte didattiche	140
6.5.1	La somma e la differenza tra due grandezze variabili	140
6.5.2	Il rapporto tra due grandezze (segmenti) AB e AC	142
6.5.3	Il prodotto di una grandezza fissa e di una grandezza variabile	144
6.5.4	Il prodotto di due grandezze uguali variabili	145
6.5.5	Il rapporto tra una grandezza fissa ed una grandezza variabile	146
6.6	L'algebra dei segmenti che costruisce un 'luogo'	147
6.6.1	Esplorazioni sul prodotto di grandezze variabili uguali tra loro	147
6.6.2	Esplorazioni sui polinomi, di secondo grado e superiore	152
6.6.3	Esplorazioni sul rapporto di grandezze variabili	156

6.7	Riflessioni su una esperienza didattica	160
7	L'efficacia didattica del Liceo Matematico attraverso le prove IN- VALSI	163
7.1	Scenario e domande di ricerca	163
7.2	I dati	165
7.3	Metodo	167
7.4	Risultati	168
7.5	Considerazioni finali	171
8	Gli effetti dell'esperienza del liceo matematico in termini di attec- giamenti sviluppati da docenti e studenti	173
8.1	Il metodo	174
8.2	Questionario rivolto ai docenti referenti del liceo matematico	174
8.2.1	I risultati relativi al questionario	177
8.3	Intervista rivolta agli studenti di ex quinte	180
8.3.1	I risultati relativi all'intervista	180
8.4	Considerazioni finali	182
9	Conclusioni	185
10	Ringraziamenti	187
	Bibliografia	189

Capitolo 1

Presentazione del lavoro di ricerca

Quanto alla verità di che ci danno
cognizione le dimostrazioni
matematiche, ella è l'istessa che
conosce la sapienza divina.

Galileo Galilei VII p. 129

1.1 Lo scenario: Il liceo matematico

Questo lavoro si colloca nella cornice del Liceo Matematico (d'ora in avanti LM), progetto di ricerca sulla didattica della matematica e di sperimentazione per le scuole secondarie di secondo grado, con diffusione su tutto il territorio nazionale.

Il progetto nasce presso l'università di Salerno nel 2015 con la finalità di proporre una didattica laboratoriale e interdisciplinare (Rogora e Tortoriello, 2018) nelle scuole. 'Nel liceo matematico si confronta il sapere umanistico, che affronta la riflessione sui fondamentali problemi umani e favorisce l'integrazione delle conoscenze, con la cultura tecnico-scientifica, che rischia altrimenti di diventare troppo settoriale facendo perdere la visione d'insieme' (Capone et al., 2017). Attraverso il liceo matematico si vuole con questo fornire agli studenti strumenti nuovi, di tipo logico-matematico, al fine di consentire loro di accostarsi allo studio della matematica in modo nuovo apprezzandone la dimensione di ricerca e sperimentazione accanto a quella storica e alle sue tante relazioni con altre discipline.

E' un percorso didattico non curricolare che si fonda su tre aspetti fondamentali: la didattica laboratoriale, l'interdisciplinarietà e la formazione dei docenti attraverso un continuo rapporto con i docenti universitari referenti per territorio.

L'avvio del LM in una scuola si appoggia sulla disponibilità e l'interesse di docenti e dirigenti scolastici e si attua attraverso protocolli d'intesa tra scuole e università oppure, in alcuni casi, tra ufficio scolastico regionale e università. Nella regione Lazio è anche attivo un accordo di rete tra alcune scuole. L'Unione Matematica Italiana (UMI) ha costituito dal 2020 il Gruppo UMI sui Licei Matematici a cui

aderiscono più di 200 soci, che ha come scopo quello di favorire il coordinamento delle attività su base Nazionale. A partire dal 2017, annualmente si organizza il Seminario Nazionale dei Licei Matematici con la finalità di presentare le esperienze delle varie sedi e confrontarsi.

Attualmente, la sperimentazione è presente in 160 istituti scolastici distribuiti su tutto il territorio nazionale¹ ed ha una dimensione che la colloca in una posizione unica nel panorama delle sperimentazioni didattiche, per dimensioni raggiunte e continuità di implementazione. Ogni scuola fa riferimento ad un ateneo, sia per la preparazione dei percorsi didattici sia per la formazione docente. Questo aspetto della formazione del docente nel rapporto continuo con l'Università, è uno dei punti più innovativi e caratterizzanti del LM, che maggiormente attrae l'interesse della componente docente.

Nel suo carattere attuale di sperimentazione, i docenti e i dirigenti impegnati si trovano ad affrontare molte difficoltà di tipo formale, come per esempio sul fronte del reperimento delle risorse per attivare le cattedre di potenziamento necessarie o nell'organizzazione del quadro orario. Al momento, dunque, proprio la grande diffusione e il successo di questo progetto ne stanno mostrando le difficoltà di attuazione, nell'assenza di un riconoscimento da parte del Ministero che possa dare una soluzione ai problemi organizzativi.

1.2 Motivazioni e obiettivi di ricerca

L'innovazione nella didattica della matematica, attualmente, è una questione centrale nelle indicazioni nazionali e nel campo della ricerca, sia per via dello sviluppo enorme che le applicazioni della matematica stanno avendo nella realtà del mondo contemporaneo, sia per i riscontri contraddittori che le rilevazioni OCSE PISA 2022² restituiscono circa l'efficacia della didattica della matematica nelle scuole italiane.

Come docente di ruolo, con 25 anni di esperienza di insegnamento nella classe A026 Matematica per le scuole superiori, sono in prima linea nella traduzione delle indicazioni nazionali nella pratica scolastica. L'esperienza di tanti anni sul campo mi ha insegnato come le sperimentazioni occasionali non abbiano prodotto impatti significativi sulla programmazione nazionale. L'incontro con il LM nel mio percorso di docenza, è stato dunque fondamentale in quanto sperimentazione con respiro nazionale che ha la potenzialità e le capacità, dimostrate in un decennio di applicazione, di innovare la pratica didattica della matematica in Italia.

Nei 5 anni precedenti la mia esperienza di Dottorato mi sono impegnata nella costruzione del LM nella mia scuola di appartenenza, in un liceo scientifico a Roma.

Insieme ad alcuni colleghi, abbiamo iniziato nel 2016 con una classe e, oggi, grazie all'impegno e alla passione dei tanti colleghi coinvolti, siamo arrivati a più di 15 classi su 3 sezioni dedicate: gli studenti e le famiglie chiedono il liceo matematico, ed i dati delle iscrizioni lo confermano. La crescita, del numero di classi e di sezioni impegnate in questo percorso, rappresenta per la scuola un notevole impegno organizzativo: aumentando il numero delle classi aumenta il numero delle ore aggiuntive necessarie allo svolgimento delle sperimentazione. Tali ore vanno declinate in ore di progetto

¹www.liceomatematico.it

²<https://www.invalsiopen.it/risultati-ocse-pisa-2022/>

oppure, se si ha la possibilità, in ore di cattedra di potenziamento che deve essere erogata dell'Ufficio Scolastico Regionale.

Il mio lavoro di dottorato, segue e complementa questa esperienza di organizzazione sul campo, puntando su due direttrici di ricerca didattica volta ad enucleare le caratteristiche che nel LM ho ritenuto essere quelle portanti e che devono dunque costituire l'ossatura attorno alla quale un curriculum nazionale può cristallizzarsi. La prima, di carattere contenutistico, è relativa al ruolo centrale che lo sviluppo della dimensione storica deve avere nel curriculum matematico come elemento portante dell'esperienza del LM e della innovazione didattica in matematica, mentre, la seconda, relativa alla didattica della matematica, riguarda la valorizzazione di questa esperienza, individuandone gli elementi quantitativi e qualitativi che possono essere di supporto nel dialogo con le istituzioni, volto al riconoscimento istituzionale del liceo matematico.

Gli OBIETTIVI DI RICERCA (nella accezione anglosassone *overarching aim of research*) che mi sono posta sono i seguenti:

OAA1. PERCORSI A PARTIRE DALLA STORIA.

Definire e sperimentare percorsi didattici curriculari per i licei che, attraverso l'integrazione della dimensione storica della matematica, permettano agli studenti di acquisire una piena comprensione della disciplina, stimolando una visione critica dello sviluppo del pensiero scientifico e ampliando al contempo i confini culturali di ciascun individuo, in coerenza con gli obiettivi del LM.

Gli scenari d'indagine relativi a questo obiettivo sono i seguenti:

- Un percorso interdisciplinare per i Licei, che integri e incroci i curricula di latino e di matematica, centrato sul periodo della rivoluzione scientifica, a cavallo tra Seicento e Settecento.
- Un percorso didattico che, attraverso l'uso di strumenti innovativi (software di geometria dinamica, stampa 3D, elaborazione digitale delle immagini, etc.) e un approccio laboratoriale basato sull'indagine (*inquiry-based learning*), permetta agli studenti di affrontare alcuni nodi concettuali fondamentali, ripercorrendone i passaggi storici che hanno portato alla loro definizione. L'introduzione di tali concetti nella didattica tradizionale, avulsa dal contesto storico nel quale sono maturati, priva gli studenti dell'opportunità di una comprensione più profonda e significativa di essi.

OAA2. ANALISI QUANTITATIVA.

Analizzare quantitativamente alcune variabili relative agli apprendimenti al fine di stimare quanto il processo formativo legato al LM possa incidere sulla valorizzazione e sul miglioramento delle situazioni di partenza degli studenti.

Scenario d'indagine:

- Monitoraggio dell'andamento scolastico attraverso le prove INVALSI di studenti del liceo matematico.

OAA3. ANALISI DEGLI EFFETTI IN TERMINI DI ATTEGGIAMENTI.

Analizzare gli effetti dell'esperienza del LM in termini di atteggiamenti da parte

di docenti e studenti relativamente ad alcuni aspetti, quali interdisciplinarietà e didattica laboratoriale, al fine di rilevare se tale pratica didattica possa contribuire a migliorare il processo di insegnamento e apprendimento della matematica.

Scenario d'indagine:

- raccolta di elementi narrativi da parte di docenti e studenti tramite questionari e interviste.

1.3 Struttura del lavoro

Il capitolo 2 è dedicato alla descrizione dettagliata del LM. Nel capitolo 3 vengono presentati i vari quadri teorici di riferimento che ho adottato per le mie attività di ricerca. All'interno di tale capitolo, i paragrafi 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 si avvalgono anche della collaborazione con la collega dottoranda Antonella Palma, con la quale ho svolto la sperimentazione in aula del lavoro presentato nel capitolo 6.

I capitoli 5 e 6 rispondono all'obiettivo di ricerca OAA1 - PERCORSI A PARTIRE DALLA STORIA e sono costituiti rispettivamente dal percorso interdisciplinare tra latino e matematica relativo alla brachistocrona nella sua evoluzione storica e da quello relativo al concetto di funzione a partire dall'algebra di Cartesio.

Il capitolo 7 presenta l'analisi quantitativa sull'efficacia didattica del LM, in termini di misura di quanto un processo formativo sia in grado di incidere sulla valorizzazione e sul miglioramento delle situazioni di partenza, utilizzando i dati INVALSI, rispondendo all'obiettivo di ricerca OAA2 - ANALISI QUANTITATIVA.

Nel capitolo 8, che risponde all'obiettivo OAA3 - ANALISI DEGLI EFFETTI IN TERMINI DI ATTEGGIAMENTI, riporto i risultati dell'analisi qualitativa, effettuata attraverso lo strumento delle narrazioni, relativa agli atteggiamenti e alle emozioni da parte di docenti e studenti in relazione al LM.

I lavori presentati nei capitoli 5, 6 e 7 sono stati oggetto di pubblicazione e sono di seguito riportati.

- Coppa, F., Filippi, P., Il latino della scienza Galilei e i fratelli Bernoulli in uno studio interdisciplinare sulla brachistocrona, in *Science & Philosophy - Journal of Epistemology, Science and Philosophy*, vol. 12 n.2 2024 (consultabile su <https://eiris.it/ojs/index.php/scienceandphilosophy/issue/view/114>)
- F. Coppa, P. Filippi, Il problema della Brachistocrona in un percorso interdisciplinare tra latino e matematica, in *Atti Workshop Latino e Matematica*, Dicembre 2023, (in pubblicazione)
- Coppa, F., Filippi, P., Il problema della Brachistocrona in un percorso interdisciplinare tra latino e matematica, in *Periodico di Matematica*, supplemento al n. 3-settembre 2024
- Coppa F., Palma A., Un percorso didattico verso il concetto di funzione a partire dalle costruzioni con riga e compasso ispirato alla storia, Abstract in atti di convegno XXII congresso società italiana di storia delle matematiche, 2023. (consultabile su <https://iris.uniroma1.it>)

- Coppa F., Palma A., Un laboratorio didattico per il concetto di funzione attraverso l'algebra dei segmenti di Cartesio in Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario 2023. (consultabile su <https://iris.uniroma1.it>)
- Coppa F., Palma A., Dall'algebra dei segmenti di Cartesio al concetto di funzione. Il laboratorio didattico, in Riflettere sulla didattica della matematica per insegnare: ricerche ed esperienze. 2023. (consultabile su <https://iris.uniroma1.it>)
- Bernardi, C., Gambini, A., Gubbiotti, S., Coppa, F., Ferretti, F., Mammana, M.F., Passaro, D., Tortoriello, F.S. & Tovenà, F. (2024). L'“efficacia” del Liceo Matematico: evidenze dalle prove INVALSI. L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol.47B N.1, pp.65-92

Il lavoro presentato nel capitolo 8 è stato accettato per pubblicazione dalla rivista 'L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate':

Coppa F., Gli effetti dell'esperienza del liceo matematico in termini di atteggiamenti sviluppati da docenti e studenti.

Capitolo 2

Il liceo matematico

Il liceo matematico (LM) è un percorso quinquennale che opera nella scuola secondaria di secondo grado. Nasce nel 2015, presso l'Università di Salerno, come progetto di ricerca, di sperimentazione e di riflessione con e tra gli insegnanti e che si pone l'obiettivo di «rispondere ad esigenze di una società complessa in cui la scienza e la tecnologia assumono un ruolo fondamentale ma, contemporaneamente, le pretese di "risolvere tutto con la ragione" appaiono inadeguate.» (Capone, Rogora e Tortoriello 2017)¹. L'idea è quella di fornire agli studenti strumenti nuovi, di tipo logico-matematico, al fine di consentire loro di approcciare allo studio e alla vita lavorativa in modo diverso. La finalità, dunque, non è quella di introdurre un maggior numero di nozioni, ma di riflettere su concetti matematici, cogliere e approfondire collegamenti con altre discipline, allargare gli orizzonti culturali.

La proposta è rivolta a tutte le scuole secondarie di secondo grado e non è riservata ai soli licei scientifici, benché ad oggi l'implementazione veda questi ultimi come largamente prevalenti. È attuato in circa 160 istituti scolastici distribuiti su tutto il territorio nazionale² ed ha attualmente una dimensione che lo colloca in una posizione unica nel panorama delle sperimentazioni didattiche, per dimensioni raggiunte e continuità di implementazione. Per raffronto, i licei scientifici, in Italia, sono circa 1700 (il complesso di tutte le scuole secondarie ammonta a circa 7000 Istituti). Coinvolge anche 30 sedi universitarie nel coordinamento delle attività didattiche degli Istituti. Ogni scuola fa riferimento ad un ateneo, sia per la preparazione dei percorsi didattici sia per la formazione docente.

È un percorso didattico non curricolare (almeno un'ora aggiuntiva al biennio ed una al triennio) di potenziamento della matematica, basato sulla didattica laboratoriale e l'apprendimento tra pari: gli studenti vengono guidati nell'investigazione dei problemi proposti in modo che possano riflettere sui concetti e sulle loro relazioni, individuare soluzioni, cogliere e apprezzare collegamenti con altre discipline, analizzare mediante la chiave storica l'evoluzione di argomenti matematici in una dimensione problematica e di stimolo al pensiero critico, all'attitudine, alla ricerca, al lavoro di gruppo e alla discussione.

Il primo aspetto che caratterizza il LM è la modalità laboratoriale, che si situa in linea con l'idea di laboratorio di matematica così come delineato in

¹Per un approfondimento sul tema della complessità vd. Morin, 1999

²cfr. www.liceomatematico.it

matematica per il cittadino dell'U.M.I.³ e rispetta le Indicazioni Nazionali ministeriali relative agli obiettivi specifici di apprendimento.

Un secondo aspetto fondante, è l'interdisciplinarietà: tramite il confronto con saperi diversi come, ad esempio, l'arte, la filosofia, il latino, si ha anche la possibilità di scoprire «il ruolo che la matematica ha avuto nei secoli come linguaggio e modello del pensiero razionale». L'obiettivo è di ampliare la formazione culturale degli studenti e svilupparne le capacità critiche e l'attitudine alla ricerca. (Capone, Rogora e Tortoriello 2017).

La terza caratteristica è senza dubbio quello della formazione dei docenti: il docente di scuola, collaborando con l'università nella definizione dei percorsi e dei metodi didattici, partecipa attivamente all'innovazione, non 'subendola' come imposta dall'alto ma essendone attore. Si crea così un legame con l'università, ricercato dalla scuola ma non sempre facile da attuare, che è percepito dai docenti di scuola come un elemento propulsore fondamentale di questa esperienza. Tale aspetto, a mio avviso, è un elemento particolarmente innovativo rispetto alle esperienze precedenti. Inoltre, stimola la costruzione di atteggiamenti positivi negli insegnanti portando come ricaduta naturale la costruzione di atteggiamenti positivi da parte degli studenti (Di Martino e Zan, 2010).

È anche importante sottolineare come il LM, per gli atenei coinvolti, rappresenti un luogo naturale per la conduzione di ricerche inerenti la didattica della matematica, la formazione degli insegnanti e l'uso di tecnologie per la didattica.

In forza dell'adesione al progetto su scala nazionale, L'Unione Matematica Italiana (UMI) ha costituito dal 2020 il Gruppo UMI sui licei matematici, a cui aderiscono al momento 600 soci UMI. La presenza nell'UMI rafforza la dimensione nazionale del progetto⁴.

In collegamento col LM, sono nati anche sottogruppi nazionali di ricerca, come il gruppo *Klein Project in Italy* aderente al gruppo internazionale *Klein Project* commissionato dall'IMU (International Mathematics Union) e dall'ICMI (International Commission of Mathematical Instruction), nato in seno all'Università di Torino.

2.1 Come si attiva un percorso di liceo matematico nelle scuole

L'avvio del LM nelle scuole nasce per lo più dall'interesse di docenti e/o dirigenti e si attua attraverso protocolli d'intesa tra scuole e università oppure, in alcuni casi, tra ufficio scolastico regionale e università oppure. Nella regione Lazio è anche attivo un accordo di rete tra alcune scuole. L'Unione Matematica Italiana (UMI) ha costituito dal 2020 il Gruppo UMI sui Licei Matematici a cui aderiscono più di 200 soci, tale gruppo ha lo scopo di favorire il coordinamento delle attività.

Sono tutti questi strumenti che favoriscono l'introduzione della sperimentazione del LM nelle scuole. Ovviamente seppur fondamentali per l'avvio, tali strumenti non risolvono il problema legato al reperimento delle ore da dedicare alla didattica del LM. In molti casi, il docente interessato si ritrova a dover procacciare le ore e,

³<https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/>

⁴<https://umi.dm.unibo.it/gruppi-umi-2/gruppo-umi-licei-matematici>

in casi più sfortunati, a dover rinunciare all'introduzione del percorso di LM nella propria scuola per mancanza di fondi⁵.

2.2 Processo di costruzione di liceo matematico nella scuola

Nel costruire i percorsi di liceo matematico nelle scuole bisogna tener presente tutta una serie di variabili correlate tra loro.

A titolo esplicativo, riporto la mia esperienza personale. Negli anni precedenti il dottorato ho coordinato la definizione e la realizzazione del LM presso un liceo scientifico di Roma, il Plinio Seniore.

Partiti con una sezione, ogni successivo anno, la richiesta crescente ha portato, nel giro di 5 anni, ad avere tre sezioni della scuola dedicate a questo tipo di offerta, come riportato nella figura 2.1.



Figura 2.1. Evoluzione temporale del numero di classi di LM al Plinio

La sfida organizzativa nel coinvolgere i docenti, strutturare le attività e gli orari, è stata notevole ed ha sollecitato la riflessione sulla necessità di una istituzionalizzazione al livello ministeriale di questa sperimentazione.

Il costante confronto con il polo universitario di riferimento, Sapienza di Roma, è stato elemento cardine per l'organizzazione del materiale e la formazione dei molti insegnanti che hanno partecipato al progetto in questi anni. Nel corso degli anni, abbiamo partecipato alle attività di formazione e di sviluppo di percorsi didattici⁶, guidati e coordinati da Marta Menghini e Stefano Finzi Vita. La formazione docenti è uno dei punti fondamentali di innovazione del LM (*cfr.* par. 2).

La condivisione di conoscenza tra università e scuola, spesso di difficile attuazione, è invece fondamentale per far sì che nuove idee e capacità possano fluire dall'università verso la scuola e viceversa. Questi flussi sono entrambi importanti: il primo permette

⁵Vedasi anche Bernardi & altri 2020

⁶<https://www.mat.uniroma1.it/liceo-matematico/scuole>

ai docenti di rimanere attivamente e fattivamente aggiornati, potendo approfondire argomenti sia scientifici relativi alla disciplina della matematica, sia didattici. Il secondo, non meno importante, consente all'università di comprendere le necessità della didattica e ciò che è possibile realizzare nel sistema scolastico, dando modo alla ricerca di mantenere un focus di servizio alla scuola. Ciò risulta di primaria importanza, affinché il sistema educativo del Paese possa rispondere alle sfide sempre crescenti di questa nostra società, la cui complessità vive un'accelerazione drammatica che rischiamo di non riuscire a seguire.

Questa alleanza tra il mondo universitario della ricerca e quello scolastico della pratica didattica, realizzata nel LM è senza dubbio il motore che ha spinto così in avanti il progetto e che lo caratterizza.

Nel caso di Sapienza, il lavoro è stato strutturato sia attorno ad una costante attività seminariale e di scambio di esperienze con i docenti, sia attorno alla definizione, costruzione e sperimentazione dei percorsi didattici, in collaborazione con i docenti della scuola. Nell'attività seminariale gli argomenti affrontati nei gruppi di lavoro spaziavano da trasformazioni geometriche e immagini digitali, logica e matematica ricreativa, italiano e matematica, educazione allo sguardo. La metodologia è stata di tipo laboratoriale. Uno dei momenti più interessanti e caratterizzanti è stato lo spazio di condivisione: momenti di confronto tra i vari docenti sulla conduzione in aula delle varie attività ed analisi dei risultati. Il confronto tra pari e con l'Ateneo è motivo di crescita.

Dal versante scolastico e quindi dell'organizzazione del percorso, insieme ai docenti coinvolti del Plinio, abbiamo organizzato in maniera strutturata e organica i contenuti da presentare nelle classi. Ciò ha dato luogo, negli anni, alla produzione di un numero corposo di schede didattiche (reperibili sul sito del dipartimento di Matematica di Sapienza⁷) di supporto al docente nell'organizzare il lavoro nelle classi. Per ogni grado di classe, abbiamo individuato un macro argomento, definendo così un percorso che è poi stato sviluppato e affrontato durante tutto l'a.s.

La definizione di percorsi in qualche modo standardizzati tramite la creazione di schede didattiche è stato un altro degli strumenti chiave che ha permesso di tesaurizzare l'esperienza che si creava con le classi pilota in modo da poterla trasferire rapidamente alle nuove classi che si succedevano ed ai nuovi docenti che entravano nel programma. Ciò ha contribuito a facilitare l'adesione al progetto da parte di altri docenti interessati ma, al contempo, spaventati per ciò che avrebbe comportato. Il lavoro più intenso si è dunque focalizzato nella creazione, per ogni anno, di un percorso didattico completo, declinato in schede didattiche.

Di seguito il quadro sinottico riportante, suddivisi per anno scolastico, i titoli delle schede prodotte nel liceo Plinio Seniore, con una breve sintesi descrittiva.

⁷<https://www.mat.uniroma1.it/liceo-matematico/argomenti> e <https://www.mat.uniroma1.it/liceo-matematico/alcuni-percorsi>

CLASSI PRIME	Percorso: Algoritmi e numeri
Algoritmi	Concetto di algoritmo e introduzione agli elementi concettuali dei diagrammi di flusso
Diagrammi di Flusso	Costruzione di diagrammi di flusso attraverso esempi
L'algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D. Parte prima	Metodo delle sottrazioni successive e delle divisioni successive. Confronto tra i due metodi e quello attraverso la scomposizione in fattori primi.
L'algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D. Parte seconda	Costruzione dei diagrammi di flusso relativi ai metodi di cui nella precedente scheda.
Introduzione al foglio elettronico	Nozioni di base per operare su un foglio excel, utilizzando operatori logici e operazione matematiche di base.
Numeri Primi	Introduzione ai numeri primi
Numeri Primi e Crivello d'Eratostene	Si analizzano le caratteristiche del crivello quantificando i passaggi ricorsivi per determinare i numeri primi compresi tra 2 ed n
Crivello di Eratostene: diagramma di flusso – (parte prima)	Dall'algoritmo al diagramma di flusso
Crivello di Eratostene: diagramma di flusso – (parte seconda)	Dall'algoritmo al diagramma di flusso
Introduzione al linguaggio di programmazione Python - parte prima	elementi di base di Python
Congetture, dimostrazioni paradossi	Selezione di semplici indovinelli di logica, teoria dei numeri, geometria e algebra al fine di stimolare una riflessione sui concetti di congettura, teorema e dimostrazione.
Congruenze	introduzione alla aritmetica modulare
La prova del nove e i criteri di divisibilità [con l'aritmetica modulare]	Applicazione dell'aritmetica modulare per dimostrare alcuni criteri di divisibilità e per comprendere la prova del nove
Algoritmo di Cifratura RSA	Elementi di cifratura RSA. Scambio di semplici di messaggi cifrati.

CLASSI SECONDE	Percorso: Le trasformazioni geometriche da un punto di vista sintetico
Sul significato di definizione	Proposte di lavoro per riflettere sul concetto di definizione
Sul significato di uguaglianza	Proposte di lavoro per riflettere sul concetto di uguaglianza
Esplorazione sulle trasformazioni rigide - (parte prima)	Proposte di lavoro per introdurre in maniera intuitiva le trasformazioni rigide nel piano
Esplorazione sulle trasformazioni rigide (parte seconda)	Proposte di lavoro per introdurre in maniera intuitiva le composizioni di trasformazioni rigide nel piano
Isometrie con Geogebra (parte prima)	Esplorazione di isometrie attraverso l'utilizzo di software di geometria dinamica
Isometrie con Geogebra (parte seconda)	Esplorazione di isometrie attraverso l'utilizzo di software di geometria dinamica
Simmetrie nelle figure limitate	Ricerca di figure con simmetria, attraverso un approccio intuitivo
Il numero aureo e la successione di Fibonacci	Introduzione del numero aureo attraverso la serie di Fibonacci
I poligoni aurei, argentei e le piegature della carta	Il numero aureo nel contesto geometrico. Rettangoli aurei e argentei e la piegatura della carta. Ritorniamo alla successione di Fibonacci.
Introduzione al linguaggio di programmazione Python - parte seconda	Applicazioni con Python: crivello di Eratostene, algoritmo di Erone per il calcolo della radice quadrata, numeri di Fibonacci.
RSA Python	Cifratura con Python.

CLASSI TERZE	Percorso: Le coniche nella storia e le trasformazioni affini nel piano
Le coniche nell'antichità	Le coniche secondo Menecmo. Attività su GeoGebra 3D.
Le coniche secondo Apollonio	Le coniche secondo Apollonio. Attività su GeoGebra 3D. Si guidano gli studenti nella realizzazione di una macchina, ispirata al metodo di Menecmo, che permette di visualizzare le coniche.
Le coniche nel piano	Riflessione e proposte di lavoro sulle coniche come luoghi geometrici del piano.
Le trasformazioni affini nel piano	Lavoro sulle trasformazioni affini nel piano e nel piano cartesiano, con l'ausilio di Geogebra.
Le matrici	Introduzione al calcolo matriciale di supporto allo studio delle affinità, con l'ausilio di Geogebra.
Le trasformazioni affini nel piano: Le matrici del secondo ordine.	Matrici delle affinità, con l'ausilio di Geogebra.
Gli invarianti delle trasformazioni affini nel piano	Esplorazione degli invarianti di trasformazioni affini, con l'ausilio di Geogebra.
Tassellazioni del piano e fregi parte 1	introduzione ai concetti di fregio e tassellazione, esplorando in altri campi del sapere
Tassellazioni del piano e fregi parte 2	Lavoro sui diciassette gruppi di simmetria per le tassellazioni in due dimensioni, utilizzando <i>TALES GAME</i> (oiler.education). Lavori sui fregi utilizzando <i>Freze Symmetry</i> (hws.edu).

CLASSI QUARTE	Percorso: Induzione e ricorsione
Il principio di induzione	Proposte di lavoro che prevedono l'utilizzo del principio di induzione.
Python e colab	Su Python e colab riconduciamo alcuni percorsi svolti: dall'algebra modulare all'algoritmo di crittografia RSA, Il progetto klein, le trasformazioni affini nel piano e i loro invarianti.
Il principio dei cassetti	Proposte di lavoro che prevedono l'utilizzo del principio dei cassetti
Ricorsione ed induzione	Lavoro ispirato alla vignetta "Recurrence and induction" del progetto klein internazionale. La ricorsione nella programmazione. La discesa infinita e le equazioni diofantee

Discorso a parte per il materiale prodotto relativamente ai percorsi del quinto anno. Alla fine del percorso abbiamo ritenuto importante puntare sul lavoro in autonomia da parte di ciascuno degli studenti, proponendo una rosa di argomenti tra i quali gli studenti, o gruppi di studenti possono scegliere per approfondire un tema e proporlo in aula.

Ben presto, l'esigenza di condivisione e confronto delle proposte didattiche a livello nazionale con le altre scuole, ha creato l'esigenza di un sistema di condivisione dei materiali creati. Il Polo Sapienza ha dunque scelto di creare un repository all'interno del proprio sito che, durante il corso del mio Dottorato, ho contribuito ad organizzare al fine di renderlo disponibile e accessibile. Di come valorizzare il materiale sopra riportato così come i materiali sviluppati dalle altre scuole romane parlerò con più dettaglio nel paragrafo 2.3.

Dalla esperienza personale, qui descritta, emergono una serie di aspetti fondamentali e caratterizzanti, che possono sicuramente essere riscontrati in qualunque altra scuola o polo universitario coinvolto nella sperimentazione e che delineano un esempio riuscito di lavoro che coinvolge ruoli differenti con finalità differenti.

Innanzitutto, si evince lo sforzo organizzativo comune di scuola e università. Inoltre, il grande impegno di tempo da parte di tutti gli attori coinvolti, sia per la produzione del materiale sia per la partecipazione ai gruppi di lavoro presso l'università. Questa permeabilità necessaria tra scuola e università, che è alla base del successo del LM, mi ha consentito, tra l'altro di concorrere con successo al dottorato in didattica e storia della matematica.

2.3 Il lavoro sull'archivio del liceo matematico

Nel corso di tutti questi anni di conduzione del progetto, è stato prodotto moltissimo materiale didattico, risorsa preziosa a testimonianza del modo in cui si sta implementando l'innovazione didattica. Al momento però, tale materiale non risulta fruibile in maniera immediata, in alcuni casi, lo si può recuperare agevolmente nel sito del liceo matematico, accedendo alle pagine dei vari poli universitari. Sarebbe auspicabile avere in futuro una condivisione più immediata di tutte le esperienze ed i materiali prodotti su scala nazionale. Ciò rientra nei miei scenari d'indagine relativi al primo obiettivo di ricerca (OAA1 - PERCORSI INTERDISCIPLINARI, vd. paragrafo 1.2), in quanto ritengo che il consolidamento di tale progetto e la sua evoluzione si fondino anche sulla condivisione di materiali già sperimentati sul territorio nazionale.

Il polo Sapienza si è orientato da tempo in tale direzione, dedicando una sessione del sito (<https://www.mat.uniroma1.it/liceo-matematico>) alla presentazione dei materiali del liceo matematico. Allo scopo, è stato costituito un gruppo di lavoro del quale faccio parte, che ne ha curato la riprogettazione e la manutenzione, in modo da fornire una consultazione per argomento e non solo per gruppi di lavoro.

La condivisione su scala nazionale potrebbe poi costituire un punto di partenza per implementare ambienti di apprendimento *e-learning* tipo MOOC (*Massive Open Online Courses*) che possano facilitare la diffusione e il confronto tra docenti provenienti a livello nazionali di strategie e metodologie didattiche per favorire la condivisione e l'evoluzione delle pratiche didattiche (Taranto et al., 2017).

Gli argomenti, riportati nella figura 2.2, sono stati individuati a partire dall'analisi del copioso materiale prodotto in questi anni cui è seguita la fase di catalogazione.

Per ciascun argomento, come si vede negli esempi riportati nelle figure 2.3 e 2.4, vengono fornite delle proposte didattiche relative a specifici contenuti, riportanti le seguenti informazioni: breve descrizione, ordine di classe, elementi d'interdisciplinarietà e link al materiale didattico.

La condivisione dei materiali porta con sé tutta una serie di benefici. Ad esempio, la possibilità di reperire il materiale facilmente unita alla consultazione per argomenti potrebbero essere la risposta per tutte quelle scuole che si trovano decentrate rispetto ai poli universitari ma che desiderano aderire al progetto. Sarebbe questo dunque un primo passo per rispondere alla criticità relativa alla partecipazione delle scuole decentrate. Ma non solo.

La facilità di reperimento del materiale ne rende più agile l'utilizzo in vista della costruzione di percorsi quinquennali che sono funzionali all'istituzionalizzazione del liceo matematico.

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di Matematica
Guido Castelnuovo

DIPARTIMENTO

DIDATTICA

STRUTTURE

RICERCA

DOTTORATO

INTERNAZIONALIZZAZIONE

TERRITORIO E TERZA MISSIONE

NOTIZIE

Aritmetica e algebra

Analisi Matematica

Algoritmi

Geometria

Combinatoria,
probabilità e statistica

Applicazioni alle
scienze

Logica e giochi

Relazioni e funzioni

Matematica e cultura
umanistica

Preparazione per
l'Università

LICEO MATEMATICO@SAPIENZA - ARGOMENTI

Nella pagina di ciascun **argomento** sono riportate le varie proposte didattiche suddivise per **contenuto**.

ARGOMENTI	CONTENUTI
Aritmetica e algebra	Sistemi di numerazione; Insiemi numerici; Numeri naturali; Numeri primi e crivello di Eratostene; Aritmetica modulare; cifrari, codici e crittografia; Numeri irrazionali; Calcolo algebrico.
Analisi matematica	Insiemi numerici e calcolo infinitesimale; Aspetti storici; Funzioni continue; I frattali.
Algoritmi	Algoritmo euclideo; Algoritmi e diagrammi di flusso; Applicazioni su foglio elettronico e su Python; Algoritmi ricorsivi e Algoritmo di Erone.
Geometria	Assiomi, definizioni e teoremi; Costruzioni con riga e compasso; Sezione aurea e successione di Fibonacci; Origami e piegature della carta; Congruenza tra figure piane; Equivalenza tra figure piane; Trasformazioni geometriche; Tassellazioni e fregi; Topologia e grafi; Coniche; Educare lo sguardo; Poliedri, solidi platonici e solidi archimedei; Solidi di rotazione; teorema di Eulero e le reti poligonali; Pi greco; Geometria Euclidea e non Euclidea.
Combinatoria, probabilità e statistica	Calcolo combinatorio; Coefficienti binomiali, Numeri di Stirling e di Catalan; Modelli di dinamica delle popolazioni; Giochi e paradossi; Statistica; Probabilità
Applicazioni alle scienze	Coordinate geografiche, cartografia e astronomia, Le forze; Entropia; Termodinamica e teoria dell'informazione; Misura ed errori; Problemi di realtà; Il metodo scientifico. Elementi di storia della fisica.
Logica e giochi	Elementi di logica; Congetture e Giochi di Logica; Giochi matematici e rompicapo; Paradossi; Dimostrare.
Relazioni e funzioni	Le curve; Relazioni tra grandezze; Problemi di massimo e minimo.
Matematica e cultura umanistica	Matematica e musica; Matematica e letteratura; Matematica e latino; Matematica e filosofia.
Preparazione per l'Università	Allenamento test d'ingresso università.

Figura 2.2. Argomenti in cui è classificato il materiale didattico



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di Matematica

Guido Castelnuovo



DIPARTIMENTO

DIDATTICA

STRUTTURE

RICERCA

DOTTORATO

INTERNAZIONALIZZAZIONE

TERRITORIO E TERZA MISSIONE

NOTIZIE



Assiomi, definizioni e teoremi ►

Titolo	Descrizione delle proposte didattiche	biennio/classe	Elementi di interdisciplinarietà	Materiali
Analizzare, costruire e confrontare - gli Elementi di Euclide	Poster: Analizzare, costruire e confrontare - gli Elementi di Euclide, presentato al Convegno dei licei matematici del Lazio, 12 aprile 2019.	I biennio	Latino, Greco	poster
Configurazioni geometriche (utilità del software didattico)	Viene chiesto agli studenti di lavorare su alcune configurazioni geometriche stimolando la necessità di formulare definizioni e scoprire regole.	I biennio		scheda
Gli assiomi di Euclide e gli assiomi degli origami	Presentazione degli assiomi di Euclide e degli assiomi degli origami.	I biennio		scheda
Il papiro di Rhind e il papiro di Mosca	Introduzione alla storia dell'algoritmo e della dimostrazione. Presentazione del papiro di Rhind e del papiro di Mosca.	I biennio		scheda
L'antica matematica greca incontra il modernismo	Excursus storico dalla geometria euclidea, fino alle geometrie non euclidee. Mondrian e rappresentazioni geometriche nell'arte.	I biennio	Arte	scheda
La grammatica della mente: i ragionamenti deduttivi	Introduzione al sillogismo ed esercizi di logica.	I biennio		scheda
Paradossi. Dimostrazioni per assurdo e dimostrazioni assurde	Presentazione dei paradossi di Zenone contro il movimento al fine di introdurre le problematiche derivanti dalla divisibilità all'infinito e per abituare alla dimostrazione per assurdo.	I biennio	Filosofia	scheda

Figura 2.3. Esempio di un argomento di geometria: Assiomi, definizioni e teoremi

[English](#)

SAPIENZA
 UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di Matematica
Guido Castelnuovo

DIPARTIMENTO
DIDATTICA
STRUTTURE
RICERCA
DOTTORATO
INTERNAZIONALIZZAZIONE
TERRITORIO E TERZA MISSIONE
NOTIZIE

Sezione aurea e successione di Fibonacci

Titolo	Descrizione delle proposte didattiche	biennio/classe	Elementi di interdisciplinarietà	Materiale
Frazioni continue e sezione aurea	- Scheda 1 "Frazioni continue": spiegazione delle frazioni continue ed esercizi. - Scheda 2 "La sezione aurea": scheda di lavoro che guida al calcolo della sezione aurea.			scheda 1 scheda 2
La sezione aurea	Schede operative su costruzione di sezione aurea, rettangolo aureo, compasso aureo. La sezione aurea nell'arte e nel corpo umano.	I biennio	Arte, Scienze	scheda 1 scheda 2 scheda 3 scheda 4 scheda 5 scheda 6
La sezione aurea	- Presentazione 1 "La divina proporzione o sezione aurea φ e i numeri di Fibonacci in Natura": numero aureo e sua applicazione nelle scienze. - Presentazione 2 "Sezione aurea - la divina proporzione dall'antichità ad oggi": applicazione nell'arte del numero aureo. - Schede 1 e 2: numero aureo e costruzioni geometriche.	I biennio	Arte, Scienze	presentazione 1 presentazione 2 scheda 1 scheda 2
Poligoni Aurei e serie di Fibonacci	- Scheda 1 "I poligoni aurei, argenti e le piegature della carta": definizione dei poligoni aurei e proposte di lavoro per gli studenti. - Scheda 2 "Il numero aureo e la successione di Fibonacci": proprietà della sezione aurea, il numero e il rettangolo Aureo. La rappresentazione ricorsiva e tramite le funzioni continue. Attività di laboratorio con foglio elettronico.	I biennio/ classe II	Arte e Disegno tecnico	scheda 1 scheda 2

Figura 2.4. Esempio di un argomento di geometria: sezione aurea e successione di Fibonacci

2.4 Stato ed evoluzione del Liceo matematico

La linea di sviluppo del LM come sperimentazione didattica è coerente con la tradizione italiana di ricerca in didattica della matematica, con il patrimonio ricchissimo di idee e di metodi che Guido ed Emma Castelnuovo ci hanno lasciato, rispettivamente: il valore dell'insegnamento estensivo e dell'esperienza di didattica laboratoriale della matematica. La sperimentazione del LM si situa in una linea di continuità con l'evoluzione dell'innovazione didattica italiana. Cito, ad esempio, le esperienze di didattica laboratoriale dei PLS (2004) o M@t.abel (2006). Altri esempi certamente imprescindibili di didattica laboratoriale, sono quelli forniti nel secolo scorso da Maria Montessori (1870-1952) e Mario Lodi (1922-2014) che valorizzano tra l'altro l'importanza dell'esperienza, della manualità e dell'impegno.

E' certamente coerente con le Indicazioni Nazionali, laddove si richiede di favorire la sperimentazione e lo scambio di esperienze metodologiche, e valorizzare il ruolo dei docenti nella loro libera progettazione didattica. Relativamente all'innovazione istituzionale nella didattica, è utile ricordare la sperimentazione del PNI, Piano Nazionale Informatica, che viene introdotta nel 1985 con la finalità di fornire una migliore preparazione scientifica agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado, in particolare per i licei classico, scientifico e per l'istituto tecnico commerciale. L'insegnamento della matematica e della fisica viene potenziata con contenuti relativi all'informatica e all'uso del computer (Barozzi e Ciarrapico, 2003). La riforma Gelmini (2008) elimina questa sperimentazione che in qualche modo confluisce nel nuovo indirizzo tradizionale del liceo scientifico. Altra innovazione nel campo della didattica, è costituita dal progetto Brocca che, tra gli anni '80 e '90 del secolo scorso, ha lavorato sulla revisione dei programmi per un biennio unico articolato relativo ai tre indirizzi di studio: liceale, tecnica e professionale (Brocca,

1991). Seppur in un contesto più ampio e con finalità differenti, il Movimento di Cooperazione Educativa⁸ (MEC), gruppo, libero e autonomo di insegnanti attenti alla valorizzazione delle culture di cui sono portatori i bambini/e, si è mosso nel campo dell'innovazione della didattica, promuovendo tra le altre cose l'arricchimento della capacità umana e professionale degli insegnanti ed il completo sviluppo della personalità degli alunni di qualsiasi condizione sociale, le attività laboratoriali e la didattica operativa.

Riferendoci ad uno scenario di respiro internazionale, si registra una esigenza di cambiamento e di evoluzione in merito all'alfabetizzazione matematica e alle competenze. Ad esempio nel PISA 2021, si evidenzia un allontanamento dalla necessità di eseguire calcoli di base al fine di consentire un collegamento diretto al mondo, in rapido cambiamento, guidato da nuove tecnologie. Rispetto al 2015, la competenza matematica nel 2021 richiede in aggiunta di comprendere concetti, procedure, fatti e strumenti per descrivere, spiegare e prevedere i fenomeni, sempre tenendo presente che la matematica è essenziale per descrivere, spiegare e prevedere il mondo. Nel PISA 2021 Mathematics Framework si legge, infatti, *"In order for students to be mathematically literate they must be able, first to use their mathematics content knowledge to recognise the mathematical nature of a situation (problem) especially those situations encountered in the real world and then to formulate it in mathematical terms. This transformation – from an ambiguous, messy, real-world situation to a well-defined mathematics problem – requires mathematical reasoning. Once the transformation is successfully made, the resulting mathematical problem needs to be solved using the mathematics concepts, algorithms and procedures taught in schools"*⁹. Lo studio ICMI 24 *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* affronta il tema delle riforme dei curricula scolastici di matematica, analizzandole secondo rilevanze e carenze. E' ragionevole che ovunque, il curriculum di matematica continuerà ad essere soggetto a riforme in risposta ai cambiamenti sociali e politici dell'istruzione. Vengono poste, tra le tante, le domande sul ruolo della matematica nelle discipline STEM e sull'opportunità di introdurre una materia integrata o interdisciplinare. Inoltre, viene posta la domanda su quali siano gli esempi di riforme riusciti o meno e quali siano i criteri di valutazione e successivamente di monitoraggio. Infine, quali ruoli svolgano e che tipo di influenze abbiano sulle riforme i diversi attori coinvolti (docenti e ricercatori). Risulta da tali studi però che manchi in letteratura una base sistematica delle riforme del curriculum di matematica per analizzare le riforme che si propongono, al fine di individuare quelle che potrebbero avere successo e, di conseguenza, le condizioni richieste per quel successo (Shimizu e Vithal, 2023 pp. 219-220).

Non abbiamo dunque una base teorica di riferimento per analizzare la sperimentazione del LM, ma possiamo sicuramente registrarne il grande successo, che si

⁸Per approfondimenti si consulti il sito <https://www.mce-fimem.it>

⁹Perché gli studenti siano alfabetizzati matematicamente, devono essere in grado, innanzitutto, di utilizzare le proprie conoscenze matematiche per riconoscere la natura matematica di una situazione o di un problema, in particolare di quelli incontrati nella vita reale, e poi di formularlo in termini matematici. Questa trasformazione – dal contesto ambiguo e complesso del mondo reale a un problema matematico ben definito – richiede ragionamento matematico. Una volta che questa trasformazione è stata completata con successo, il problema matematico risultante deve essere risolto utilizzando concetti, algoritmi e procedure matematiche apprese a scuola.

evincesse dalla sua diffusione su territorio nazionale. Offre, infatti, una risposta alle esigenze di docenti e studenti che richiedono una didattica differente, recependo anche le indicazioni di cambiamento che si respirano a livello internazionale.

Numerose sono le testimonianze positive relativamente ad attività didattiche svolte nel LM da parte sia di docenti sia di studenti; ma bisogna tener presente che l'entusiasmo di un racconto è inevitabilmente condizionato da esperienze e convinzioni personali e, in ogni caso, non nasce da un giudizio imparziale. Un'indagine nazionale sui Licei Matematici (Bernardi et al., 2022), promossa da alcuni ricercatori (docenti universitari e delle scuole secondarie di secondo grado) e accolta favorevolmente dal gruppo LM dell'UMI, ha consentito di evidenziare elementi di forza e di criticità e, quindi, di fornire spunti rivolti a migliorare l'esperienza e ad ampliare la partecipazione. Risultano come punti di forza la didattica laboratoriale, i percorsi interdisciplinari che favoriscono l'integrazione tra cultura umanistica e scientifica oggi abbastanza distanti e ovviamente la collaborazione tra università e scuola. Come elemento di criticità, emerge una certa fatica da parte dei docenti nel portare avanti il progetto sotto forma di sperimentazione: è sempre più difficile reperire i fondi ed organizzare un quadro orario. Affinché il LM continui ad esistere, è essenziale in prima battuta, superare tale criticità, attraverso il riconoscimento da parte del MIM, ad esempio, ottenendo una necessaria attenzione da parte del USR nell'assegnare cattedre di potenziamento alle scuole che hanno attivato il LM.

Capitolo 3

I quadri teorici di riferimento

Il lavoro presentato nella tesi si situa all'interno di alcuni quadri teorici che di seguito discuto.

3.1 Costrutti di riferimento per la conduzione delle attività didattiche

La progettazione dei percorsi didattici descritti in questa tesi, si inserisce bene nel quadro di quella che oggi si individua come una metodologia *inquiry-based education* (IBE), cioè una pedagogia basata sull'indagine, in cui gli studenti sono invitati a lavorare in modo simile a come lavorano matematici e scienziati. nonostante il liceo matematico non sia una costruzione che ha proceduto da prerequisiti di carattere teorico, ma si è realizzata come work in progress di un lavoro progettato in condivisione e costantemente provato sul campo, tuttavia, le metodologie che sono emerse come condivise possono ben situarsi in questo ambito generale.

L'*inquiry* può essere analizzato, nel sistema formativo, su tre livelli differenti: nell'apprendimento della matematica da parte degli studenti attraverso compiti di natura esplorativa; nell'insegnamento della matematica da parte dei docenti per esplorare possibili progettazioni di compiti; e nella ricerca relativa alla didattica della matematica (Jaworski, 2008a).

Coerentemente con la finalità principale per cui l'IBE è nato, ossia come risposta al 'preoccupante declino dell'interesse dei giovani per gli studi scientifici e matematici chiave in Europa' (Rocard et al., 2007) attribuito a pratiche didattiche tradizionali incentrate sull'istruzione e la ripetizione, il metodo IBE è adatto sia per costruire un apprendimento significativo sia per insegnare agli studenti l'uso di un metodo che possa essere applicato anche in contesti non scolastici.

Nella realizzazione delle proposte didattiche contenute in questa tesi sono presenti anche metodi deduttivi, che invece nella finalità dell'IBE dovevano essere sostituiti come inversione di pedagogia dell'insegnamento (Artigue e Blomhøj, 2013), ritenendo significativi alcuni aspetti della didattica tradizionale, come ad esempio, la trasmissione e la ripetizione dei contenuti così come l'esercitazione.

3.1.1 I principi filosofici dell’Inquiry Based education

I principi filosofici che sono alla base dell’IBE prescrivono che l’accesso alla formazione sia libero e universale, puntano a stimolare l’interesse degli studenti per l’apprendimento sì da favorirne lo sviluppo dell’autonomia, e mirano così alla formazione di esseri umani in grado di svolgere un ruolo attivo nella società. Al filosofo ed educatore americano John Dewey (1859–1952) è generalmente attribuita la paternità dell’IBE, ma già filosofi quali Rousseau (1712–1778), von Humboldt (1767–1835), Pestalozzi (1746–1827) e molti altri avevano contribuito a un cambiamento nell’epistemologia, passando da una conoscenza trasmessa dal docente come statica e definitiva ad una conoscenza che richiede il contributo del pensiero, della riflessione, della sperimentazione e l’apertura al dubbio del discente. La conoscenza è dunque sviluppata dall’umanità e appartenente all’umanità, e l’educazione è tesa a promuovere il nuovo cittadino moderno. Questa epistemologia mette il soggetto apprendente al centro del processo di apprendimento e lo pone soggetto attivo nell’acquisire e sviluppare conoscenze utili per risolvere problemi della vita reale e per dare senso al mondo.

Per Dewey (Dewey, 1938) l’indagine è alla base sia della scoperta che dell’apprendimento. Il processo di indagine si sviluppa come un’interazione (nella figura 3.1 rappresentato dal cerchio azzurro con un tratteggio al suo interno) tra il conosciuto e l’ignoto in situazioni in cui un individuo - o un gruppo di individui - si trova di fronte ad una sfida. Quindi una parte dell’ignoto esiste in una situazione, ossia interazione individuo/ambiente, che viene riconosciuta come sfidante ma l’indagine può svilupparsi solo perché questa parte dell’ignoto può essere affrontata con ciò che è già noto, in quanto dati e riferimenti possono suggerire ipotesi e inferenze. Questa idea base sul significato dell’indagine costituisce una sfida didattica quando viene implementata nella pratica educativa.

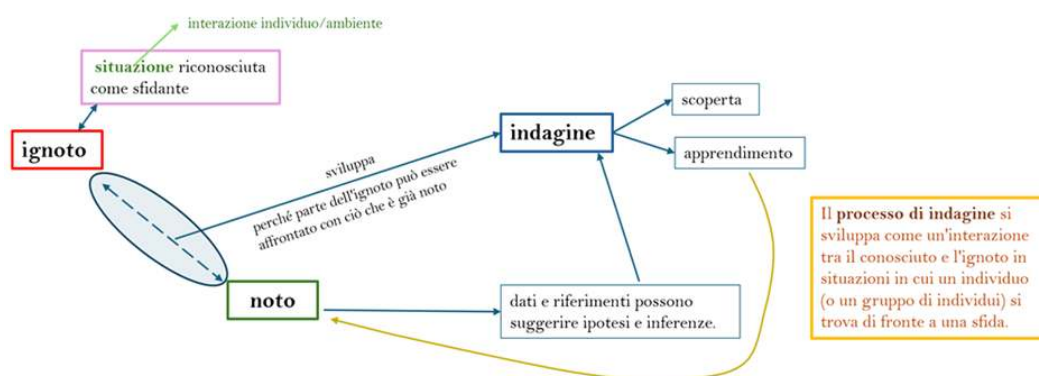


Figura 3.1. Processo d’indagine (Dewey, 1938)

Tale processo, che ho schematizzato nella figura 3.1, è stato utilizzato per la costruzione di attività all’interno dei percorsi didattici da me proposti, soprattutto nella realizzazione di classi GeoGebra (vd. paragrafo 4.1) attraverso le quali gli studenti (singolarmente o in piccoli gruppi) sono stati posti in situazioni sfidanti, supportati da riferimenti che vanno a consolidare il noto scoperto ed appreso in precedenza. Infatti, a partire da una situazione ignota, utilizzando ciò che si conosce,

il noto, si avvia l'indagine che porta, attraverso ipotesi e inferenze alla scoperta e quindi all'apprendimento. In tal modo, l'ignoto diventa noto e arricchisce così il bagaglio iniziale di conoscenze.

Dewey ha sviluppato in particolare il concetto di indagine riflessiva (*reflective inquiry*), fondamentale per la pratica pedagogica. Come illustrato nella figura 3.2, l'apprendimento è un processo adattivo in cui l'esperienza funge da motore per creare connessioni tra sensazioni e idee, attraverso un percorso controllato e riflessivo. L'apprendimento, dunque, avviene attraverso un ciclo continuo di esperienza e riflessione: il ciclo di indagine riflessiva.

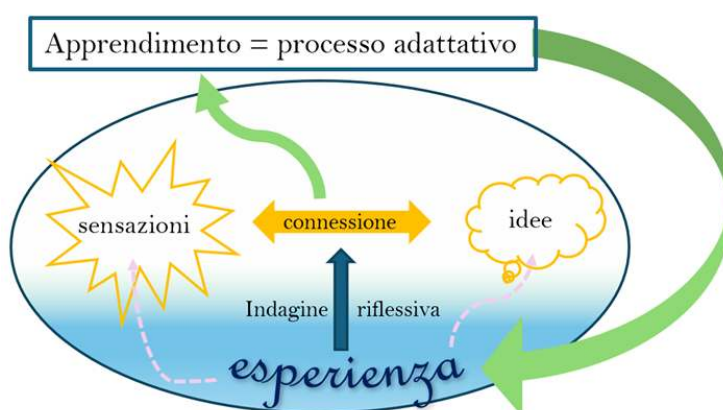


Figura 3.2. Ciclo d'indagine riflessiva

L'indagine riflessiva è un processo che inizia con l'identificazione di una situazione incerta, quindi sfidante, e prosegue con l'osservazione, la raccolta di dati, la formulazione di ipotesi, l'azione e la riflessione sui risultati ottenuti. Ciò consente un apprendimento attivo e partecipativo che permette agli studenti di sviluppare capacità di pensiero critico e di adattarsi a nuove situazioni; tuttavia, nella fase indagine, la riflessione è cruciale. Non si tratta semplicemente di agire, ma di riflettere sulle azioni, analizzarle e imparare da esse. La riflessione consente di valutare le esperienze passate e di prendere decisioni più informate per il futuro, promuovendo così un apprendimento continuo.

Un altro aspetto fondamentale dell'indagine riflessiva è il legame con problemi reali. La formazione è rilevante per la vita degli individui e quindi non dovrebbe mancare il riferimento a problemi che si incontrano nella quotidianità, rendendo così l'apprendimento significativo e duraturo.

Nel definire gli interventi didattici, ho tenuto conto anche di questa prospettiva, riconducendo, laddove possibile, l'argomento matematico, almeno nel suo innesto, ad un problema concreto, in considerazione del fatto che ogni occasione di indagine riflessiva è legata alla formazione di cittadini democratici (Dewey, 1938). L'insegnamento, infatti, ha come fine quello di formare individui capaci di pensare in modo critico e autonomo, che partecipano attivamente alla vita sociale e democratica: l'indagine riflessiva, con il suo approccio collaborativo e critico, è senza dubbio uno strumento essenziale per raggiungere tale obiettivo.

Concentrandosi sull'indagine in scienze e matematica (IBSE e IBME) attraverso i percorsi didattici che ho progettato, gli studenti, (come mostrato in figura 3.3)

possono sviluppare conoscenze rilevanti per la materia lavorando con situazioni problematiche e allo stesso tempo sviluppare atteggiamenti generali e abitudini di indagine attraverso le discipline stesse.

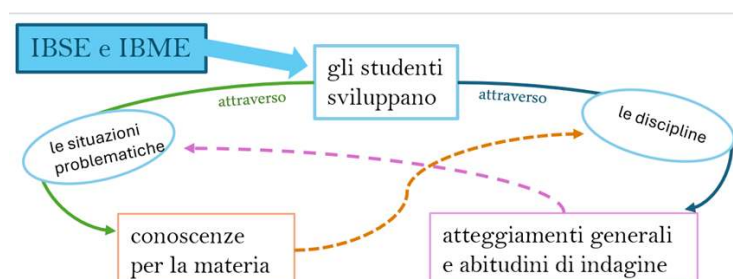


Figura 3.3. Gli effetti dell'IBSE e IBME

Dewey considera l'indagine riflessiva la chiave per superare la distinzione tra conoscere e fare. Un tale obiettivo non si raggiunge necessariamente attraverso il metodo ordinario di risoluzione dei problemi, ma piuttosto attraverso la così detta pratica sperimentale del conoscere. In questo modo, offre una nuova prospettiva sul comportamento umano (Hiebert et al., 1996).

Lo slogan *learning by doing*, spesso usato per riassumere la visione di Dewey, è riduttivo, poiché se è vero che l'apprendimento risulta dall'azione, quest'ultima deve essere incorporata in un processo di indagine riflessiva. Infatti, il valore dell'azione risiede nella generalizzazione che emerge dall'indagine riflessiva, se manca quest'ultimo aspetto le esperienze non solo possono essere non formative, ma addirittura contro-formative e possono arrestare o distorcere la crescita di ulteriori esperienze. L'organizzazione dell'esperienza degli studenti e lo sviluppo di abitudini mentali generali è dunque una funzione essenziale della formazione (Dewey, 1938, pp. 25–26).

Dewey poi pone molta enfasi sul fatto che l'indagine non si conclude con l'aver capito come 'funziona', ma bisogna anche sapere perché 'funziona', passo necessario che porta a nuove domande e congetture. Pertanto, è essenziale che il docente selezioni esperienze appropriate, guidi le riflessioni degli studenti sulle esperienze proposte affinché il loro potenziale formativo emerga effettivamente e organizzi attività di indagine in modo che la conoscenza, in particolare la conoscenza della materia, si accumuli progressivamente.

Sulla base di questi principi di Dewey, le sperimentazioni relative ai percorsi didattici descritti nei capitoli 5 e 6 sono state costruite attraverso la formulazione di domande guida, domande stimolo e domande per la riflessione, facendo emergere così il potenziale educativo dell'IBE (IBSE nell'educazione scientifica e IBME in quella matematica) (Artigue e Blomhøj, 2013).

3.1.2 L'Inquiry Based Education nella prospettiva scientifica e in particolare della matematica Inquire Based Mathematical Education

Nell'educazione scientifica le idee dell'IBE¹ trovano spazio nella didattica con nomi del tipo: apprendimento per scoperta o apprendimento attivo. L'indagine è un'attività poliedrica che implica: fare osservazioni; porre domande; esaminare fonti di informazione per sapere cosa è già noto; pianificare indagini; rivedere ciò che è già noto alla luce delle prove sperimentali; utilizzare strumenti per raccogliere, analizzare e interpretare dati; proporre risposte, spiegazioni e previsioni; e comunicare i risultati. Un'indagine richiede l'identificazione delle ipotesi, l'uso di pensiero critico e logico e la possibilità di considerare spiegazioni alternative. In aggiunta, un'indagine scientifica, oltre a riferirsi ai diversi modi in cui gli scienziati studiano il mondo naturale, deve anche proporre spiegazioni basate sulle prove derivate dal loro lavoro (National Research Council, 1996).

Questo è il modo di procedere degli scienziati e l'IBE permette agli studenti di comportarsi come tali. La letteratura sull'educazione scientifica riporta un ampio spettro di pratiche di insegnamento basate sull'indagine (Barrow, 2006). Nella progettazione dei percorsi laboratoriali discussi in questa tesi, si ritrovano processi caratteristici del cosiddetto modello delle *5E* (Bybee et al., 2006), coerente con quanto indicato dal National Research Council (NRC) 2000 che promuove l'apprendimento basato sull'indagine, attraverso le seguenti fasi:

1. *Engagement*: gli studenti vengono introdotti al problema e si cimentano in un'indagine preliminare; questa fase si svolge in classe.
2. *Exploration*: gli studenti pongono domande di ricerca e avanzano ipotesi; questa fase si può svolgere sia in classe sia in laboratorio o all'aperto.
3. *Explanation*: i gruppi di studenti discutono i primi dati emersi dall'esperienza diretta o dalla sperimentazione laboratoriale; di solito questa fase si svolge a casa.
4. *Elaboration*: gli studenti elaborano le scoperte e approfondiscono le conoscenze acquisite; questa fase si svolge in classe o in laboratorio.
5. *Evaluation*: gli studenti organizzano attività di autovalutazione formativa; in genere l'ultima fase si svolge in classe.

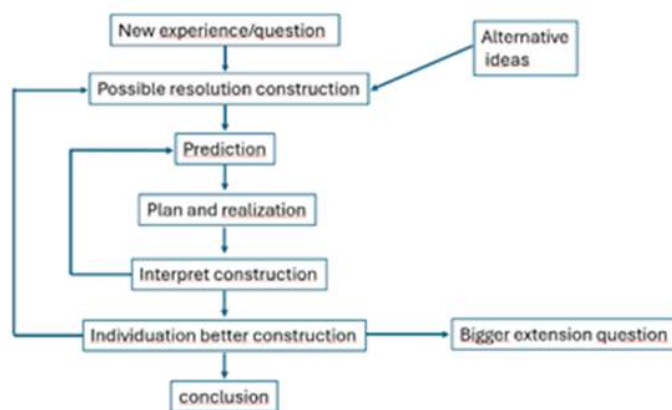
La formulazione delle domande ha un ruolo importante, così come il gioco dialettico tra fasi induttive e deduttive. Anche quando si presenta un'attività

¹Gli obiettivi dell'IBE possono essere schematicamente così riassunti: attribuire un ruolo centrale ai processi di indagine riflessiva nell'apprendimento; fornire una visione dell'indagine come un processo che incorpora la determinazione dell'oggetto o del problema da indagare; mescolare induzione e deduzione (che è di natura riflessiva); fornire una visione dell'indagine come un processo generale riguardante la vita quotidiana e la pratica professionale, così come le attività scientifiche, che quindi non è diverso nei suoi vari contesti; evidenziare il valore attribuito all'efficienza pragmatica della conoscenza messa in azione; attribuire importanza alle situazioni di vita reale, alle attività pratiche e all'esperienza degli studenti nell'implementazione dell'IBE; fornire una visione che l'IBE dovrebbe sviluppare in uno studente le abitudini mentali sottostanti il processo di indagine come un modo di essere che promuove l'apprendimento; servire la causa della democrazia.

attraverso una struttura lineare o algoritmica, semplificando la complessità del processo di indagine, in realtà tale processo di indagine non viene ridotto linearmente poiché esso conserva cicli con revisione dei passaggi precedenti e interazioni più o meno complesse tra diversi componenti. Questo è emerso in particolare, durante le sperimentazioni, nelle attività proposte con GeoGebra dove le diverse fasi (domanda, predizione, pianificazione, scoperta e restituzione), apparentemente poste in sequenza lineare si ritrovano in cicli più ampi che aprono nuove questioni e attivano idee alternative.

Le proposte di attività didattiche presentate in questa tesi, infatti, iniziano con l'esplorazione di un problema in modo da consentire agli studenti di apprendere e comprendere aspetti importanti di un concetto o idea matematica. I problemi sono aperti e permettono più risposte corrette e diversi approcci di soluzione. Dopo tentativi individuali, o in piccoli gruppi, si svolge la condivisione e discussione collettiva delle diverse strategie adottate e soluzioni trovate, che permette di scoprire e discutere approcci e soluzioni alternative, e di chiarire così le proprie idee.

Ad esempio, il seguente diagramma 3.4 relativo alla costruzione delle attività del percorso didattico inerente il concetto di covariazione a partire dall'algebra dei segmenti di Cartesio (vd. 6), permette di evidenziare alcuni aspetti: la natura ciclica del processo; l'importanza attribuita alla generazione di 'idee più grandi' (Harlen, 2010) e il riconoscimento di possibili ostacoli nelle idee preesistenti degli studenti.



A route diagram aiming at capturing the inquiry process in the Cartesio project

Figura 3.4. Il processo inquiry nel progetto dell'algebra dei segmenti di Cartesio

Il modello di costruzione della comprensione attraverso un diagramma consente di apprezzare come idee più piccole, cioè quelle che si applicano a particolari osservazioni o esperienze, siano progressivamente sviluppate in idee più grandi, che si applicano a una gamma di oggetti o fenomeni correlati (Harlen, 2012, p. 5).

Ritengo importante partire dalle idee che gli studenti hanno già interiorizzato, in quanto, in generale, i ragazzi (e così anche gli adulti) fanno riferimento e conservano quei concetti che hanno elaborato da soli e che quindi hanno senso per loro. Infatti, è fondamentale che ad ogni studente sia data l'opportunità di scegliere autonomamente quali congetture siano più coerenti con le prove per poter criticamente costruire

idee condivise dalla comunità scientifica scorgendovi però anche il proprio personale contributo.

La fase d'esplorazione di un problema consente agli studenti di apprendere e comprendere aspetti importanti di un concetto o idea matematica, attraverso il *problem solving* (Polya, 1945). Infatti, esso incoraggia lo sviluppo di competenze come il pensiero critico, la creatività, la capacità di prendere decisioni e la resilienza di fronte agli errori.

La sintesi del percorso conoscitivo e le soluzioni proposte, commentate e discusse insieme, guidano altresì gli studenti a comprendere aspetti chiave e analizzare le molteplici soluzioni. È stato importante dare loro la possibilità di impegnarsi in attività di risoluzione di problemi e di ottenere risultati, che possono anche aprire vie a nuovi problemi (Cai, 2010).

Attraverso le classi GeoGebra (vd. capitolo 4) ho definito una situazione didattica (Brousseau, 1997), ovvero un sistema di interazione tra studenti, docenti e conoscenze matematiche, che ha offerto agli studenti mezzi per immaginare e realizzare diverse azioni, oltre che ricevere feedback lungo il percorso. La situazione didattica appare come un gioco nel quale il docente, in un *milieu*, spinge lo studente a far evolvere una situazione a-didattica in una situazione di apprendimento. E' stato così possibile osservare le loro strategie e le loro idee in modo da poterli accompagnare negli adattamenti, il potenziale di apprendimento si è così basato sull'ottimizzazione. La necessità di superare gli ostacoli, ovvero qualcosa che si frappone all'apprendimento (Brousseau, 1976), mi ha indotto a creare delle apposite situazioni didattiche in modo da far comprendere agli studenti la necessità di abbandonare le loro misconcezioni e quindi intraprendere una strada diversa² (D'Amore, 2023, Zan, 2007).

La costruzione di situazioni in cui gli studenti necessitano di confrontare tra loro i risultati ottenuti e si scambiano le competenze acquisite per progettare nuove situazioni, ha favorito poi l'elaborazione di linguaggi operativi appropriati e specifici della matematica oltre che la sistematizzazione delle conoscenze nel momento di devoluzione ovvero nella giustificazione, argomentazione ed esposizione del loro lavoro (Artigue e Blomhøj, 2013, D'Amore, 2023).

3.2 Il ruolo della storia della matematica nella didattica

La speculazione filosofica, conquista straordinaria dell'uomo, unitamente alla necessità di risolvere problemi concreti, ha fornito un terreno fertile per elaborare teorie e modelli che sono divenuti, tra gli altri, pensiero matematico.

La matematica che studiamo oggi è frutto di un lungo, affascinante e intricato percorso, che ha consentito di volta in volta l'elaborazione e l'affinamento non solo delle teorie ma anche del loro linguaggio e della successiva formalizzazione. Lo studio dell'evoluzione del pensiero matematico e di come esso si sia sviluppato, oltre a contribuire al raggiungimento di una piena comprensione della matematica, permette altresì di allargare i confini culturali di ciascun individuo.

La storia della matematica (da ora in avanti semplicemente storia) si occupa dello sviluppo del pensiero, delle concezioni epistemologiche e dell'evoluzione delle teorie,

²Per un'applicazione del costrutto di ostacolo epistemologico nel campo della didattica della fisica vedasi anche Tombolato, 2016

permettendo di distinguere tra argomenti affrontati nell'antichità (relativi a teorie non necessariamente superate) e altri affrontati solo di recente (Menghini, 1989). L'approccio epistemologico alla disciplina coinvolge lo studioso nello sviluppo del pensiero matematico e della scoperta, liberando la matematica da alcuni tecnicismi che potrebbero ostacolarne la familiarità, riconducendola così, in maniera palese, ad una delle caratteristiche intellettuali dell'uomo (Fried, 2001). In tal modo, si restituisce ad essa un posto nella cultura generale del cittadino: infatti, contestualizzando storicamente un contenuto matematico questo può essere affrontato da diversi punti di vista, pluralità che amplia la possibilità della sua comprensione teorica e della sua applicazione a problemi concreti.

Come riscontrato in letteratura, sono molteplici i vantaggi nell'introdurre la storia nell'ambito della didattica della matematica. Ad esempio, permette agli studenti di: sviluppare una comprensione molto più ricca della teoria e delle sue applicazioni in modo da poter osservare gli stessi fenomeni da più prospettive; comprendere il contesto storico e le connessioni tra le idee che hanno portato allo sviluppo di concetti matematici; apprezzare come questi concetti si siano evoluti nel tempo; riconoscere e utilizzare le connessioni tra idee matematiche e comprendere come tali idee si interconnettano e si basino l'una sull'altra per produrre un insieme coerente; riconoscere dove la matematica possa essere applicata in altri contesti (Katz, 2004).

La storia può fornire anche un valido contributo per far comprendere agli studenti come sia efficace il formalismo matematico attuale comparato alla scrittura dei matematici del seicento o addirittura a quella dei matematici dell'antichità; inoltre, permette di far apprezzare l'evoluzione del linguaggio specifico e dei concetti, dando vitalità ad una disciplina che non è fissa né definitiva, come invece spesso viene considerata. Il confronto tra strategie moderne e antiche può anche allargare la visione degli studenti relativamente al pensiero creativo degli scienziati, e aiutarli a sottolineare intuizioni che oggi diamo per scontate perché intasate da automatismi (Freudenthal, 1983).

Un altro ruolo importante dell'uso della storia riguarda senza dubbio l'interdisciplinarietà, soprattutto in quanto consente di apprezzare come le varie discipline coinvolte concorrano alla formazione di un ramo della conoscenza (Menghini, 1989). La dimensione storica nell'ambito dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica arricchisce dunque la comprensione dei concetti da parte degli studenti, tale impatto però è difficile da quantificare attraverso metodi di valutazione (Clark, 2019). La letteratura che affronta la misurazione degli obiettivi educativi in relazione all'uso della storia nella didattica evidenzia che molti dei risultati ad esso attribuiti, come l'aumento di interesse o una comprensione più profonda dei concetti, sono difficili da misurare attraverso analisi quantitative tradizionali. Sarebbe dunque necessario adottare metodi diversi dalle normali valutazioni utilizzate nelle scuole (Rogers, 1993). I tentativi di misurare l'impatto storico tramite test standardizzati ha generalmente fallito, poiché gli obiettivi più complessi e interdisciplinari, come lo sviluppo del pensiero critico o l'apprezzamento storico, non sono facilmente catturabili da metriche convenzionali. Neanche il raggiungimento di obiettivi, come l'interesse o la comprensione di un concetto, può essere misurato in modo quantitativo ed ancora meno lo è l'impatto sull'educazione matematica, quando viene utilizzata la storia (Rogers, 1993, Clark, 2019). Per questo motivo le ricerche più recenti si sono spostate verso approcci più completi, concentrandosi su metodi qualitativi e

misti (Clark et al., 2022), che spesso includono riflessioni degli studenti, osservazioni in classe e l'integrazione di valutazioni formative e sommative per catturare una gamma più ampia di risultati educativi.

Tenendo conto di quanto sopra esposto, ho progettato i percorsi didattici senza avere la pretesa di fare misurazioni sull'efficacia dell'uso della storia ma solo osservando qualitativamente la risposta emozionale e di interesse degli studenti sia durante l'intervento (feedback in itinere) sia attraverso interviste di gradimento e riflessione effettuate al termine del percorso (feedback finale).

3.2.1 I *why* e gli *how* nell'uso della storia della matematica

L'utilizzo di elementi mirati della storia consente di affrontare con consapevolezza specifici concetti matematici, come evidenziato dall'ampia produzione presente in letteratura. Negli studi scientifici i numerosi argomenti a favore dell'uso della storia nella didattica e le varie idee su come farlo non sempre sono chiaramente distinti (Jankvist, 2009). Nella sua classificazione Uffe Thomas Jankvist, facendo riferimento allo studio ICMI 2000 (Tzanakis & Arcavi, 2000), separa le argomentazioni per l'uso della storia, che denomina *why*, dai differenti approcci relativi a come usarla, che denomina *how*. Questa distinzione iniziale consente di analizzare successivamente le interconnessioni tra le categorie dei *why* e degli *how*, che così diventano più chiare (Jankvist, 2009). Ciò permette di progettare in modo consapevole un percorso didattico a partire dalla storia che sia coerente con le finalità formative prefissate. Relativamente alle argomentazioni riguardanti i *why* egli distingue due tipologie: quelle che fanno riferimento alla storia come strumento per aiutare l'effettivo apprendimento e insegnamento, e quelle che fanno riferimento alla storia come fine in sé. Riguardo agli *how*, Jankvist individua i seguenti approcci:

- Per illuminatura / miniatura (informazioni storiche ad integrazione del contenuto matematico): si passa da piccole note a margine a veri e propri epiloghi storici che non contribuiscono però alla comprensione del concetto matematico.
- Per moduli (unità didattiche dedicate alla storia): molto spesso si riferiscono a singoli argomenti, legati fortemente con il curriculum, da sviluppare in due o tre ore di lezione. In altri casi possono essere dei veri e propri corsi monografici di storia della matematica.
- Basati sulla storia (percorsi didattici ispirati alla storia della matematica): a differenza dell'approccio per moduli, questo non tratta lo studio della storia della matematica in modo diretto ma in modo indiretto.

All'interno di ciascuno di questi approcci, la storia può essere inclusa in modo più o meno vasto. Quello basato esclusivamente sulle illuminature, a differenza degli altri due, non favorisce lo studio di un problema nella sua evoluzione. L'approccio per moduli, per sua natura, però non è sempre applicabile in un contesto scolastico tradizionale, a differenza di quello basato sulla storia che risulta più duttile alle esigenze didattiche. Nel caso del LM, invece, grazie alla sua organizzazione che consente di raggiungere finalità formative di ampio respiro culturale, diversi percorsi

didattici vengono proprio realizzati mediante moduli per approfondire contenuti matematici specifici.

Nel progettare i percorsi didattici, relativamente alle argomentazioni (*why*) ho utilizzato la storia come strumento, mentre come approccio (*how*) ho adottato quello basato sulla storia, che si ispira al principio storico-genetico, introdotto da Toeplitz, con l'idea di presentare un argomento matematico nella sua sequenza evolutiva e non solo nella sua sequenza logica (Toeplitz nel 1926). Ho ritenuto, infatti, che questo connubio sia dal punto di vista motivazionale sia cognitivo costituisca un valore aggiunto per l'apprendimento da parte degli studenti.

L'approccio basato sulla storia trova fondamento nell'argomentazione evoluzionistica: l'ontogenesi ricapitola la filogenesi, formulata dal biologo e filosofo naturale tedesco Ernest Haeckel nel 1874, nota come 'legge fondamentale della biogenesi' (Haeckel, 1906, pp. 2-3). Tale concetto è stato ulteriormente sviluppato da Haeckel stesso, concludendo che 'lo sviluppo psichico di un bambino non è che una breve ripetizione dell'evoluzione filogenetica' (Furinghetti e Radford, 2002 p. 634). Hans Freudenthal recepisce la teoria di Haeckel ma fa un'importante mediazione con la didattica, sostenendo: '*children should repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past known a bit more of what we know now*³' (Freudenthal, 1991, pp. 46, 49). Quindi, nel contesto didattico, il processo di apprendimento ispirato alla storia necessita di un adattamento curato dal docente, ovvero gli studenti dovrebbero essere guidati nelle attività, reinventando la matematizzazione, che è l'attività organizzativa del matematico e non la matematica. Lo studente ricapitola così il processo di scoperta dell'umanità in uno scenario opportunamente a lui adattato, dove la storia viene "modificata" in modo mirato e consapevole dal docente. L'idea è quella di attingere ad 'argomenti storici per scegliere una genesi di un concetto adatto all'uso nelle scuole e per costruire o 'inventare' situazioni didattiche che forniranno questa genesi' (Brousseau, 1997, p. 96). I problemi e le domande che sono stati stimolanti per l'evoluzione del pensiero scientifico, si possono ricostruire in un contesto attuale e secondo una notazione moderna, in modo che si ripresentino come sfide accattivanti per gli studenti (Tzanakis, 2000, p. 112). Tale approccio basato sulla storia richiama in modo naturale quello che può essere chiamato approccio genetico all'insegnamento e all'apprendimento (Tzanakis e Arcavi, 2000, p. 208), secondo il quale non esiste un modo univocamente prestabilito per presentare un dato argomento, quindi, si deve pensare più ad un atteggiamento che ad un metodo algoritmico. Questo si basa sul principio genetico introdotto da Toeplitz cui ho fatto riferimento prima, ed è ovviamente legato alla teoria di Haeckel sopra citata. L'aggettivo genetico, secondo Freudenthal, non evidenzia però, anzi nasconde, il coinvolgimento attivo dello studente, al quale invece si chiede di lavorare creativamente per matematizzare la realtà partendo da come questa gli viene presentata dal docente (Freudenthal, 1991, p. 31, p. 50). Si tratta quindi, in questo caso, di una reinvenzione guidata che si ispira al principio psicologico – genetico (Jankvist, 2009). Psicologi come Piaget e Garcia hanno cercato invece di sostituire l'idea di un parallelismo tra sviluppo storico (filogenesi) e sviluppo individuale (ontogenesi)

³Lo studente ripete la storia non come è avvenuta effettivamente ma come sarebbe avvenuta se gli uomini del passato avessero conosciuto qualcosa di quello che conosciamo noi oggi.

con una riflessione sui meccanismi cognitivi dell'acquisizione della conoscenza, che vedono come processi universali, indipendenti da contesti storici o culturali. Essi distinguono tra strumenti cognitivi biologicamente determinati e significati sociali attribuiti agli oggetti. In contrasto con questa visione cognitivista, Vygotsky offre un approccio socio-culturale radicalmente diverso, in cui la cultura gioca un ruolo strutturante nello sviluppo cognitivo. Le funzioni mentali superiori si sviluppano attraverso strumenti culturali (linguaggio, artefatti, pratiche) e quindi l'ontogenesi non può in alcun modo replicare la filogenesi; l'apprendimento precede lo sviluppo, e la mente è intrinsecamente sociale⁴ (Radford et al., 2002 p. 143).

Relativamente alle interconnessioni tra i *why* e gli *how* rappresentate da Jankvist (Jankvist, 2009 nel suo schema riportato in figura 3.5, il lavoro da me condotto è ovviamente contestualizzabile all'interno della connessione tra '*History-as-a Tool Arguments*' e '*History-based Approaches*'.

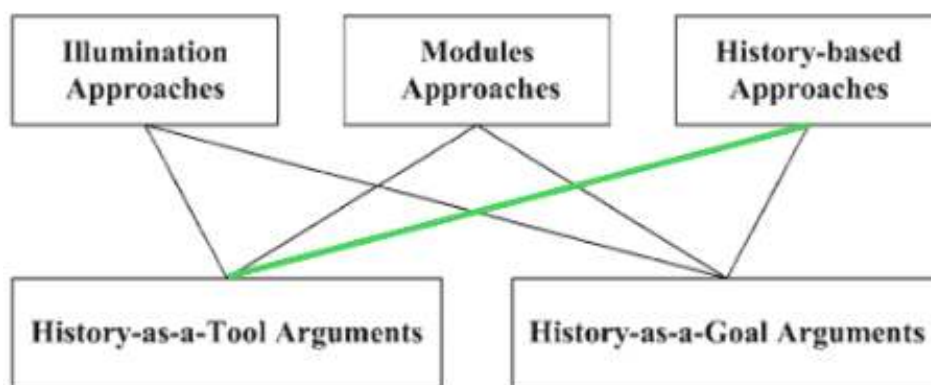


Figura 3.5. Sei possibili connessioni tra le categorie dei perché e dei come ((Jankvist, 2009)

In conclusione, i principi che emergono dalla scelta di questa interconnessione, e che ho considerato nella progettazione dei miei lavori, possono essere così sintetizzati:

- i concetti non sono statici ma in evoluzione;
- i diversi sistemi di rappresentazione che si ritrovano nelle fonti storiche possono essere interpretati come uno dei possibili tra quelli oggi in uso;
- alcune proprietà possono essere riscoperte, liberandole da sovrastrutture date per scontate e intasate da automatismi.

3.2.2 Le finalità e gli effetti dell'uso della storia della matematica

Le finalità e gli effetti che potrebbero essere perseguiti attraverso attività storiche, seguendo la casistica/classificazione di H. Niels Jahnke (Jahnke et al., 2000, pp. 291-328), sono:

⁴Per un'analisi approfondita dei rapporti tra lo sviluppo storico del pensiero matematico e i processi cognitivi degli studenti, si veda anche Radford et al., 2002, dove vengono esplorate le implicazioni pedagogiche derivanti dall'uso della storia della matematica nella pratica didattica, con particolare attenzione alle difficoltà concettuali affrontate dagli studenti.

- **Sostituire:** integrare la storia nella matematica significa sostituire il solito con qualcosa di diverso; ciò permette di vedere la matematica come un'attività intellettuale, piuttosto che solo come un corpus di conoscenze o un insieme di tecniche.
- **Riorientare:** l'integrazione della storia nella matematica sfida le percezioni consolidate di ciascuno rendendo il familiare non più familiare. Affrontare un testo storico può causare un riorientamento delle nostre opinioni. La storia della matematica ha il pregio di «sorprendere con ciò che viene da sé» (Veyne, 1971). Spesso nell'insegnamento accade che i concetti appaiono da sempre esistenti nella forma che conosciamo e così vengono manipolati senza pensare alla loro costruzione nel tempo e alle modifiche apportate da autori diversi attraverso ampliamenti e confutazioni. La storia ci ricorda che ogni concetto è stato inventato da una persona o da un gruppo di persone e che non è improvvisamente 'apparso' da solo; quindi la matematica si forma ed evolve nello spazio e nel tempo perché i suoi contenuti hanno una genesi ed una evoluzione.
- **Comprensione culturale:** L'integrazione della storia ci invita a collocare lo sviluppo della matematica nel contesto scientifico, tecnologico e sociale di un tempo e uno spazio particolari, quindi all'interno della storia delle idee e delle società. Questo aspetto invita anche a considerare la storia dell'insegnamento della matematica, con le ricadute sociali e culturali nelle diverse comunità.

Gli effetti dei miei interventi didattici si collocano proprio nell'ambito del riorientamento, dove la lettura di testi storici può produrre uno shock culturale (Jahnke et al., 2000). Questa positiva destabilizzazione può avvenire se la lettura non è teleologica, cioè a condizione che non tentiamo di analizzare il testo in modo univoco dal punto di vista della nostra attuale conoscenza e comprensione. Esiste il rischio che una lettura parziale possa portare con sé interpretazioni errate, dato che chi legge potrebbe non cogliere il senso di chi lo ha scritto arrivando ad una concezione diversa. Si può ovviare a ciò, attraverso una attenta presentazione agli studenti del contesto specifico. Infatti, il valore del riorientamento sta proprio nel 'comprendere' piuttosto che nel 'giudicare' e, in questa ottica, gli studenti che interagiscono con i testi originali devono sforzarsi di ricordare che lo scrittore non si rivolge a loro, ma a un pubblico a lui contemporaneo, talvolta ostile o ancora non pronto ad accogliere le novità del tempo che per noi oggi potrebbero essere già assodate. Usare la storia, però, presuppone che gli insegnanti abbiano il senso della storia e, naturalmente, che siano in grado di gestire qualcosa di più ampio del solo contenuto matematico. Ciò non implica la necessità di avere una formazione specialistica nel settore storico. Come ci insegna Ingrid Daubechies nella sua *Lectio magistralis*⁵ dobbiamo osare e allargare lo sguardo su orizzonti diversi da quelli nei quali ci siamo specializzati. A tal proposito, mi piace riportare le sue parole: «È una cosa che ho sperimentato più volte nella mia carriera: seguire un percorso non standard spesso significa dover lavorare di più per acquisire intuizioni e comprensioni che altri potrebbero aver appreso nell'equivalente professionale dell'asilo nido; d'altra

⁵per il conferimento del Dottorato di ricerca honoris causa in Matematica il 12 maggio 2023

parte, porta il meraviglioso vantaggio di rendere possibile guardare alle questioni di interesse da un'angolazione diversa, attraverso una lente diversa. Questo può essere molto utile! Invita a non sottrarsi alle sfide».

Suggerimento questo che potrebbe essere rivolto ai docenti in modo da poterli incoraggiare ad usare senza paura la storia nella didattica della matematica.

3.3 L'interdisciplinarità tra matematica e altri saperi

Il sapere interdisciplinare, come è noto, non è la somma delle conoscenze provenienti da diversi campi, ma un *corpus* cognitivo che supera il semplice accorpamento di contenuti disciplinari grazie alla ristrutturazione del sapere stesso. Le discipline collaborano e parlano tra loro, creando nuove forme di conoscenza e favorendo innovazioni sia nella ricerca sia nella pratica educativa.

È auspicabile adottare nella didattica un approccio interdisciplinare che incentivi gli studenti a scorgere le interconnessioni tra le varie discipline poiché questo consente di sviluppare un pensiero critico e creativo (Klein, 2010).

L'integrazione è essenziale per affrontare le sfide contemporanee. La soluzione di problemi complessi, infatti, necessita di un approccio educativo e di ricerca che integra conoscenze e metodologie provenienti da diverse discipline a volte apparentemente poco affini. L'insorgere di sfide multiformi promuove non solo l'apprendimento di contenuti specifici, ma anche lo sviluppo di competenze trasversali quali il pensiero critico, la capacità di collegare informazioni e di riconoscere lo stesso oggetto visto da prospettive diverse. Solo quando gli studenti, futuri cittadini del mondo, sono in grado di elaborare e giustificare integrazioni tra discipline, conquistano un apprendimento profondo e significativo (Boix Mansilla, 2005). Nel mondo complesso e interconnesso in cui viviamo la comprensione dei fenomeni può avvenire solo grazie all'integrazione di informazioni, dati, tecniche, strumenti, concetti e/o teorie provenienti da diverse branche del sapere, e solamente un approccio interdisciplinare, consente di risolvere problemi, altrimenti impossibili da affrontare con un'unica visione disciplinare (Boix Mansilla, 2002). L'abitudine ad una visione d'insieme deve quindi essere esercitata fin dalla scuola primaria, promuovendo l'apprendimento interdisciplinare.

Comunque la necessità di coltivare questo approccio olistico non è caratteristico solo del tempo dei Big Data, ma da sempre è la spinta al progresso cognitivo dell'uomo. Infatti, coltivare la capacità degli individui di unire la conoscenza proveniente da fonti vaste e disparate in insiemi coerenti consente di affrontare questioni urgenti di sopravvivenza culturale e naturale (Gardner, 2006). La sintesi è una capacità umana fondamentale e, in particolare, la sintesi interdisciplinare, che richiede l'integrazione di conoscenze e modi di pensare più discipline, consente di raggiungere una comprensione ampia, profonda e aumentata.

Analizzare la complessità della sintesi interdisciplinare in termini di costruito è un'impresa ardua, e non sorprende che gli studi cognitivi sull'apprendimento interdisciplinare siano scarsi. Tuttavia, l'integrazione rappresenta la pietra filosofale degli sforzi interdisciplinari, capace di trasformare intuizioni disciplinari diffuse in sapere organico (Boix Mansilla, 2016).

Per favorire una comprensione più profonda di concetti fondanti da parte degli studenti, nei miei lavori ho tenuto conto di questa pietra filosofale che pare abbia coinvolto ed emozionato gli studenti, come emerge da osservazioni qualitative.

Un quadro epistemologico per l'apprendimento interdisciplinare al fine di risultare produttivo deve considerare quattro principi, ovvero deve essere:

- pluralista, cioè deve considerare pariteticamente i vari ambiti disciplinari;
- rilevante per il fenomeno da analizzare, evidenziando i processi di integrazione interdisciplinare;
- esplicativo nel mostrare il progresso della conoscenza nella sua complessità;
- garante della qualità della conoscenza, riducendo la probabilità di errore attraverso i vari contributi interdisciplinari (Boix Mansilla, 2016).

Tali principi puntano direttamente al costruzionismo pragmatico – fondamento epistemologico per l'apprendimento interdisciplinare – che ha come caratteristiche un apprendimento intenzionale, pluralistico e provvisorio (Goodman e Elgin, 1988). In quanto costruzionista, questo fondamento pone l'attenzione sul progresso della comprensione oltre che all'acquisizione della conoscenza. In quanto pragmatico, esso privilegia contesto e scopo dell'indagine, permettendone la comprensione nelle sue molteplici forme mediante l'utilizzo di diversi registri simbolici (matematici, visivi, linguistici, cinestetici, etc.).

Questa epistemologia è fondamentalmente pluralistica, in quanto, la comprensione implica la costruzione di 'un sistema di pensiero in equilibrio riflessivo' (Elgin, 1996), ovvero la situazione in cui credenze, principi e giudizi si armonizzano e formano un insieme coerente in equilibrio dinamico, in quanto è plastico a modifiche ogni qual volta emergono nuove informazioni o sorgono conflitti al suo interno. Quindi, nell'apprendimento interdisciplinare la ricerca intellettuale che gli studenti intraprendono favorisce la produzione personale di una sintesi attraverso spiegazioni complesse, disegni, grafici, metafore e narrazioni che avvengono durante il processo di apprendimento, sfruttando prospettive differenti e non solo connettendo campi separati. L'attenzione critica nei confronti di un apprendimento in evoluzione sfida il sistema di pensiero emergente e accoglie la propensione all'errore, puntando all'obiettivo di una comprensione più profonda, ampia e significativa (Boix Mansilla, 2016).

Riferendomi a questo quadro teorico, ho progettato e modificato in modo evolutivo i percorsi didattici che hanno dialogato e interagito con discipline di ambiti diversi da quelli strettamente scientifici.

Nel contesto dell'interdisciplinarità, assume importanza il concetto di *boundary crossing* che deriva proprio dalle teorie socio-culturali di apprendimento e collaborazione interdisciplinare. Attraverso il *boundary crossing* si esplora sia come le persone attraversino i confini tra comunità di pratica diverse sia come gli strumenti, concetti o artefatti – denominati *boundary objects* – facilitino questa transizione. Tali oggetti favoriscono la comunicazione e la collaborazione tra discipline diverse consentendone un'integrazione più fluida. (Akkerman e Bakker, 2011). Inoltre, essi permettono a individui con background diversi di comprendere e affrontare problemi comuni,

mantenendo al tempo stesso prospettive disciplinari distinte. Il *boundary object* può anche essere un artefatto che non solo rappresenta uno strumento cognitivo, ma anche un mediatore tra saperi disciplinari. Il processo di oggettivizzazione, attraverso questi artefatti, rende tangibile e condivisibile il sapere tra diversi domini disciplinari, rendendo possibile il superamento dei confini tra discipline.

In contesti educativi, il *boundary object* può essere usato per permettere agli studenti di integrare conoscenze e abilità provenienti da diverse aree del sapere, per trasformarle quindi in competenze. Nel percorso sulla brachistocrona (vd. paragrafo 5.3) i testi originali in lingua latina sono stati i *boundary object* analizzati dal punto di vista della lingua, della matematica e della fisica.

Gli artefatti, nell'ambito della teoria dell'oggettivizzazione di Radford, giocano un ruolo centrale nel processo di costruzione della conoscenza, diventando così il mezzo attraverso cui le conoscenze matematiche o scientifiche emergono, si condividono e si oggettivano in un contesto collettivo (Radford, 2008). La transizione concettuale tra *boundary object* e artefatto permette di evidenziare come l'interdisciplinarietà si fondi sulla capacità di rendere 'comunicabili' i concetti attraverso elementi comuni, agevolando così la costruzione di significati condivisi in contesti culturali diversi. Nella dinamica interdisciplinare, gli artefatti fungono non solo da strumenti cognitivi ma anche da strumenti comunicativi, facilitando la connessione tra diversi campi del sapere. La teoria della *commognition*, infatti, evidenzia come il pensiero e la comunicazione siano strettamente legati e come gli artefatti siano centrali nell'interazione tra apprendimento e linguaggio (Sfard, 2008).

In quest'ottica, non ritengo sia una forzatura interpretare anche l'artefatto GeoGebra, pur intrinsecamente legato all'ambito matematico, come un traduttore del pensiero in azione e facilitatore della comunicazione attraverso il registro visivo-dinamico, divenendo così un *boundary object*.

Questi fondamenti epistemologici relativi all'interdisciplinarietà, sono riscontrabili anche nella normativa scolastica (Indicazioni Nazionali 2010). Il dibattito continuo sull'innovazione didattica nelle discipline STEM, ha focalizzato l'attenzione su metodologie di tipo laboratoriale e problematico (*problem solving, flipped classroom* etc.). Infatti, nelle Indicazioni Nazionali per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in riferimento ad obiettivi, competenze e autonomia didattica viene fatto esplicito riferimento alla 'unitarietà della conoscenza, senza alcuna separazione tra nozione e sua traduzione in abilità, e la conseguente rinuncia ad ogni tassonomia. [...] Non è (non è mai stata) la scuola del nozionismo a poter essere considerata una buona scuola. Ma è la scuola della conoscenza a fornire gli strumenti atti a consentire a ciascun cittadino di munirsi della cassetta degli attrezzi e ad offrirgli la possibilità di sceglierli e utilizzarli nella realizzazione del proprio progetto di vita'.

Viene altresì dato rilievo alla 'necessità di costruire, attraverso il dialogo tra le diverse discipline, un profilo coerente e unitario dei processi culturali'. Inoltre, sempre nelle Indicazioni viene posta l'attenzione su 'i punti fondamentali di convergenza, i momenti storici e i nodi concettuali che richiedono l'intervento congiunto di più discipline per essere compresi nella loro reale portata'.

Anche nelle Linee Guida del 2019, nell'ambito della proposta pedagogica del *service learning*, viene data importanza all'apprendimento che si misura con problemi realmente presenti nel proprio contesto e che necessariamente devono essere

affrontati mettendo in campo competenze derivanti da ambiti differenti, acquisibili appunto attraverso l'interdisciplinarietà.

Attualmente, la matematica viene percepita spesso come disciplina prevalentemente astratta, e ciò è molto distante dall'immagine che, invece, ci rilascia la storia della matematica. Infatti, ad esempio, nel passato vari settori della matematica e della fisica (così come anche delle scienze se pensiamo allo studio della curva logistica per le diffusioni delle epidemie) erano strettamente interconnesse.

Analizzando un passato molto lontano, possiamo addirittura vedere come la matematica elementare nasceva spesso dal tentativo di risolvere problemi della vita reale. In alcuni casi, il confine è così sottile che spesso non è chiaro se problemi pratici o teorici abbiano motivato lo sviluppo di uno o dell'altro (Grugnetti et al., 2000). La specializzazione educativa è un fenomeno moderno che si estende non solo alla matematica ma a tutte le altre discipline, e che tende a considerare tanto più la matematica scolastica odierna come completamente separata dalle altre materie del curriculum. In realtà, numerosi sono gli spunti interdisciplinari che coinvolgono la matematica e che potrebbero costituire punto di partenza per percorsi didattici stimolanti (Grugnetti et al., 2000).

Ovviamente, il legame tra la matematica e la fisica ha una lunga e consolidata relazione fin dai tempi di Archimede, che continua in modo significativo anche nella rivoluzione scientifica del seicento, e non necessita di esempi. Un percorso che coinvolge le scienze potrebbe essere relativo alla misura del raggio terrestre col metodo di Eratostene, anche avviando collaborazioni tra scuole situate in città differenti e mediante l'utilizzo di reti di comunicazione (Ogbom et al., 1996). Una lunga tradizione ha il legame tra arte e matematica, due esempi tra i tanti: la pittura rinascimentale e lo sviluppo della prospettiva, nell'arte islamica lo studio di tassellazioni e le simmetrie. La matematica è inoltre indissolubilmente legata alla filosofia, i concetti dell'infinito e dello spazio ne sono un esempio emblematico di riflessione comune. E' noto che fino al XVIII secolo non c'era una distinzione netta tra il pensiero filosofico e quello matematico. Filosofia naturale era il nome dato alle attività scientifiche, quindi alla riflessione filosofica sulla natura, prima della fisica moderna. Spinoza (XVII secolo), addirittura utilizza la formulazione euclidea delle nozioni elementari, assiomi e teoremi nelle sue dimostrazioni dell'esistenza di Dio.

In aggiunta, l'interdisciplinarietà può riguardare anche il metodo d'indagine: ad esempio, la storia, al fine di interpretare eventi passati, utilizza strumenti come la logica, la ragione e le relazioni di causa effetto, analoghi strumenti utilizza la matematica per dimostrare congetture.

Quelli elencati sono solo alcuni dei possibili spunti di interdisciplinarietà ma l'aspetto importante è che l'esplicitazione di tali contaminazioni tra le varie discipline contribuisce ad aiutare lo studente a costruire una cassetta degli attrezzi (Boero et al., 2008) interpretativa per saperi apparentemente molto distanti tra loro.

In questo scenario, la storia della matematica può fungere da ponte tra la matematica e le altre materie (Tzanakis e Arcavi, 2000), e questo è il contesto nel quale mi sono mossa per progettare i percorsi didattici. Tale ponte interdisciplinare mi ha permesso di lavorare su due fronti: portare la matematica all'interno di ambiti diversi del sapere e mostrare che le creazioni di questa disciplina sono spesso figlie di problemi che nascono in contesti e situazioni anche non strettamente matematiche.

La costruzione di un contesto storico, inoltre, consente di apprezzare non solo i vari saperi ma anche le loro interconnessioni, permettendo così una comprensione più complessa dello sviluppo delle conquiste dell'umanità. Si può affermare dunque che la didattica interdisciplinare e la storia della matematica si incontrano ad un livello metacognitivo. Un'esplorazione della teoria educativa che va oltre la programmazione curricolare, e una storia che va oltre una storia di eventi può aiutare a provare a capire il come e il perché di ciò che sta accadendo nel mondo. Questa esigenza metacognitiva stimola il docente ad indagare la natura della matematica, il contesto filosofico e, quindi, le questioni multiculturali e interdisciplinari; aspetto che, come descritto nel capitolo 2, è uno dei pilastri su cui si basa il liceo matematico, attraverso la sua didattica che supera la concezione di una netta e invalicabile separazione tra due distinte aree del sapere (Rogora e Tortoriello, 2018).

Nei lavori da me condotti, descritti nei capitoli 5 e 6, ho tenuto conto di tutti questi aspetti relativi alla didattica interdisciplinare, in cui la matematica diventa il collante culturale nell'insegnamento (Capone et al., 2017).

Concludo con le parole di Lucia Grugnetti e Leo Rogers che, a mio avviso, colgono l'essenza di un'educazione interdisciplinare: *«from the philosophical point of view: mathematics must be seen as a human activity, with its cultural and creative aspects; from the interdisciplinary point of view: when mathematics is linked with other subjects, the connections must be seen not only in one direction. Students will find their understanding both of mathematics and their other subjects enriched, through the historical liaison, sympathies and mutual aid between the subjects; from the cultural point of view: mathematical evolution comes from a sum of several contributions. Mathematics can be seen as having a double aspect: an activity both done within individual cultures and also standing outside any particular culture.»*⁶ (Grugnetti et al., 2000, p. 61).

3.4 Evoluzione delle prasseologie nell'educazione matematica

All'interno del mio lavoro di ricerca ho potuto condurre delle riflessioni in merito alle prasseologie della comunità coinvolte nelle varie sperimentazioni, ovvero ricercatori, insegnanti e insegnanti-ricercatori. Con il termine prasseologia, dal greco $\pi\rho\alpha\chi\iota\varsigma$ e $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$, si intende proprio la pratica ed il discorso/ragionamento che giustifica le relative pratiche.

La Trasposizione Meta-Didattica (MDT) è uno dei modelli per inquadrare progetti di formazione degli insegnanti, tenendo conto sia della dimensione di ricerca sia di quella istituzionale (Arzarello et al., 2014, Arzarello et al., 2012, Robutti, 2020 e Cusi et al., 2023). Ispirandomi a tale modello ho focalizzato l'atten-

⁶Dal punto di vista filosofico: la matematica deve essere vista come un'attività umana, con i suoi aspetti culturali e creativi; dal punto di vista interdisciplinare: quando la matematica è collegata ad altre materie, i legami devono essere considerati in entrambe le direzioni. Gli studenti troveranno arricchita la loro comprensione sia della matematica sia delle altre materie attraverso il collegamento storico, le simpatie e l'aiuto reciproco tra le discipline; dal punto di vista culturale: l'evoluzione matematica deriva da una somma di contributi diversi. La matematica può essere vista come avente un doppio aspetto: un'attività svolta all'interno di culture individuali ma che allo stesso tempo si colloca anche al di fuori di una particolare cultura

zione su quegli aspetti che ho ritenuto di interesse per la mia ricerca quali appunto le prasseologie di insegnanti e ricercatori e la doppia dialettica che genera le dinamiche che ne consentono l'evoluzione. Inoltre, mi sono focalizzata anche sulle dinamiche tra componenti interne ed esterne in termini di internalizzazione, ossia il processo attraverso il quale una comunità inizia ad adottare abitualmente prasseologie mai adottate, o addirittura non conosciute (componenti esterne) (Cusi et al., 2023).

Il quadro MTD si basa sulla Teoria Antropologica della Didattica (ATD) (Chevallard, 1985, Chevallard, 1999 Chevallard et al., 2015), il cui concetto fondamentale è quello di prasseologia. In tale teoria l'attività matematica è collocata nel contesto delle attività umane e delle istituzioni sociali, integrata con elementi rilevanti che si concentrano sulla specificità dei ruoli dei ricercatori e degli insegnanti e che consente la descrizione dell'evoluzione delle loro prasseologie nel tempo. Il postulato sul quale poggia la ATD è che tutte le azioni umane che si compiono possono essere riassunte sotto un modello unico, ovvero la prasseologia, che può essere descritta attraverso i seguenti quattro concetti: compito, tecnica, tecnologia e teoria.

Alla base troviamo la nozione di compito (più generale) e tipo di compito (più specifico operativo).

I compiti non sono dati dalla natura ma sono un artefatto della didattica, la cui ricostruzione è un problema a sé stante, che è l'oggetto stesso della didattica. Dato un tipo di compito, c'è una tecnica (dal greco $\tau\epsilon\chi\nu\eta$, saper fare) per risolverlo. Dato il tipo di compito, la relativa tecnica si accompagna sempre alla tecnologia, che è un discorso razionale sulla tecnica per giustificarne l'utilizzo, in modo da assicurarsi che questa permetta di realizzare compiti di quel dato tipo. Ad esempio, l'utilizzo di una formula è la tecnica per risolvere un tipo di compito dato mentre la dimostrazione della formula ne rappresenta la tecnologia. In molti casi, elementi di tecnologia sono mischiati con la tecnica.

Possiamo dire allora che, come illustrato in figura 3.6 una prasseologia è l'insieme delle pratiche e dei discorsi legati a una specifica attività o campo del sapere (in questo caso la matematica) che include un compito, una tecnica, una tecnologia e una teoria. Il blocco pratico compito-tecnica è organizzazione prasseologica (saper fare) mentre il blocco tecnologia-teoria è tecnologico-teorico (sapere).

In genere, la povertà prasseologica si traduce in una mancanza di tecniche, ecco perché è importante analizzare le pratiche di insegnamento (Chevallard, 1985 e Chevallard, 2019). L'insegnamento della matematica potrebbe dunque essere modellato secondo prasseologie didattiche, in cui i blocchi di *praxis* e *logos* sono correlati ad alcune specifiche prasseologie matematiche.

Il mio lavoro relativo al percorso sulla covariazione, descritto nel capitolo 6, si colloca in questo contesto e mira a utilizzare alcune tecnologie non in uso per una determinata tecnica in relazione ad un compito assegnato. Infatti, in tale percorso propongo la produzione di grafici di funzioni polinomiali e razionali, mediante la tecnologia dell'algebra di Cartesio. Durante la sperimentazione di tale percorso, ho potuto apprezzare come le tecnologie adottate dagli studenti per gli stessi tipi di compito non siano state sempre uguali, mentre la componente teorica è emersa nello spazio dedicato alla giustificazione/spiegazione/produzione.

Con il termine di prasseologia paradidattica si indica l'insieme di pratiche, tecniche e discorsi che gli studenti (e in alcuni casi anche i docenti) sviluppano in

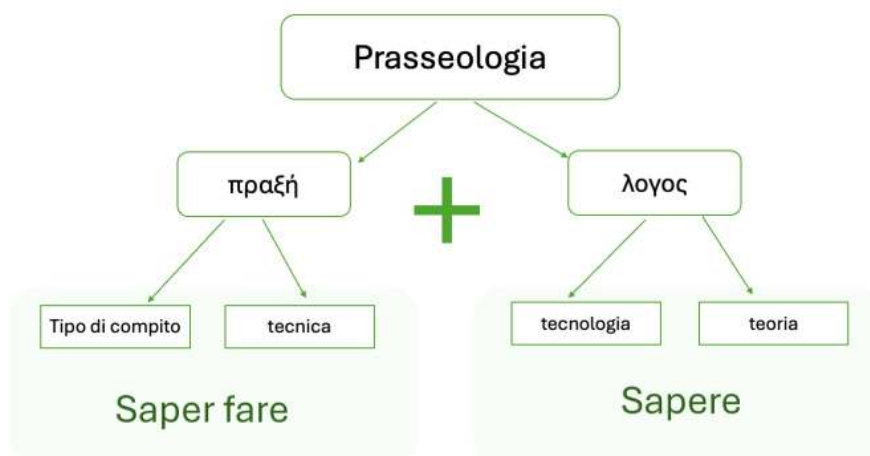


Figura 3.6. Prasseologia didattica

contesti informali o 'paralleli' all'insegnamento formale della matematica. Ciò è stato per me un punto di riferimento soprattutto in relazione agli aspetti sia di preparazione ed evoluzione di materiali didattici sia di confronto con i docenti che hanno accolto le sperimentazioni nelle loro classi e non solo nella fase di docenza (Miyakawa e Winsløw, 2019).

Le prasseologie meta-didattiche fanno riferimento, invece, alle riflessioni sulle prasseologie didattiche sopra descritte, e loro trasformazioni ed evoluzioni attraverso le interazioni che avvengono tra diverse comunità. Una delle ipotesi fondamentali del quadro MDT è che, ogni comunità abbia delle prasseologie meta-didattiche iniziali. Queste prasseologie evolvono grazie ai processi di internalizzazione, convergendo così verso componenti condivise delle prasseologie meta-didattiche finali (Arzarelo et al., 2014, Robutti, 2020).

In particolare, nel processo di internalizzazione l'oggetto del lavoro viene interpretato da insegnanti e ricercatori, secondo il quadro del *Boundary Object* (BO) (Akkerman e Bakker, 2011 e Cusi et al., 2023). La descrizione di come avviene un processo di internalizzazione si basa su diversi tipi di agenti (metodologici, istituzionali, materiali e tecnologici, motivazionali) che determinano l'evoluzione delle prasseologie degli insegnanti (Cusi et al., 2023 e Prodromou et al., 2018).

Nel lavoro relativo al percorso sulla covariazione (vd. capitolo 6), mi sono anche concentrata sulle interazioni che avvengono tra insegnanti e ricercatori per studiare sia come l'evoluzione delle convinzioni degli insegnanti e dei ricercatori influenzino prasseologie meta-didattiche e processi di internalizzazione, sia come l'evoluzione di tali prasseologie, influenzi l'evoluzione delle convinzioni degli insegnanti, grazie ai processi di internalizzazione.

Ho progettato e sperimentato le attività favorendo una circolarità di relazione tra ricercatore, docente-ricercatore e altri insegnanti. In tal modo, si è sviluppata conoscenza e consapevolezza attraverso il potenziamento dell'attività metacognitiva,

realizzando sia un tipo di ricerca evolutiva sia un apprendimento collaborativo di tipo *co-learning*⁷ (Jaworski, 2008b). Questi due approcci nel mio lavoro risultano complementari, infatti dalla riflessione sui risultati e sulle esperienze ne è scaturita l'acquisizione di pratiche innovative in un contesto di *co-learning*.

La scelta di svolgere le attività in classe insieme ad altri ricercatori e/o insegnanti si basa sulla mia convinzione che il lavoro cooperativo in compresenza aggiunge la riflessione 'a caldo' relativa alle attività e alle relazioni con gli studenti, permettendo così di cogliere aspetti che possono perdersi e/o deformarsi in una riflessione a posteriori. Infatti, il confronto con l'altro docente-ricercatore subito dopo l'intervento in classe ha consentito di far emergere elementi nascosti, come ad esempio atteggiamenti non verbali degli attori (anche di chi conduce la sperimentazione), importanti per uno studio a largo raggio dell'intervento in classe. Ciò ha permesso anche un continuo reciproco controllo tra i docenti-ricercatori, coadiuvato da un autocontrollo cosciente delle possibili dinamiche che si potevano innescare.

Questa modalità di lavoro ispirata al MDT, mi ha permesso di focalizzare le vedute su aspetti fondamentali sia per la formazione del docente-ricercatore sia per la riflessione, l'implementazione e l'eventuale modifica delle attività proposte in aula. Infatti, un punto di forza del confronto subitaneo con l'altro docente e la condivisione dei feedback osservati da parte degli studenti in classe ha permesso l'aggiustamento di alcune prasseologie degli insegnanti-ricercatori anche nell'immediato, ossia negli interventi che si sarebbero svolti successivamente a breve termine.

Solo lavorando contemporaneamente e sulla stessa attività con un altro docente-ricercatore è possibile svolgere sia il compito di conduttore della sperimentazione sia quello di osservatore. Questo interscambio di ruoli, concordato e studiato nella fase di progettazione dell'intervento in aula, si è rivelato avere una notevole valenza sia nel dialogo pre e post intervento sia nella valutazione di riprogettazione.

Parimenti importante, inoltre, è la modalità asincrona relativa alla riflessione sul lavoro, in quanto la distanza spaziale e temporale dall'intervento in aula permette un'analisi riflessiva più mirata e ordinata. Inoltre, in questa fase si inseriscono anche altri attori della riflessione, quali il ricercatore universitario e gli insegnanti accoglienti.

La sinergia delle due modalità di riflessione (sincrona e asincrona) consente di effettuare modifiche evolutive sia delle prasseologie di docenti-ricercatori e docenti, sia del percorso proposto. L'osservazione e lo studio critico-riflessivo di processi d'aula sono condizioni necessarie per acquisire maggior consapevolezza del ruolo che il docente svolge in classe, delle tecniche e tecnologie adottate dagli studenti per la risoluzione di problemi e di tutti quegli aspetti non prevedibili propri di un sistema complesso, quale è l'aula. Tale riflessione sulla propria pratica, grazie al confronto con l'altro docente-ricercatore, favorisce lo spostamento di attenzione (*shifts of attention*) da un focus sul prodotto dell'azione didattica, che comunque viene osservato, ad un focus sul processo, e il conseguente sviluppo di consapevolezza circa gli effetti di una azione didattica mirata (Cusi e Malara, 2016).

⁷Per ricerca evolutiva (Design-Based Research o DBR) si intende un approccio alla ricerca educativa che si focalizza sullo sviluppo e l'implementazione di interventi educativi innovativi mentre il *co-learning*, o apprendimento collaborativo, si riferisce a un modello di sviluppo professionale dove insegnanti e studenti, o insegnanti tra loro, apprendono insieme attraverso l'interazione e la collaborazione.

Questo è lo sfondo in cui si realizza anche l'educazione alla consapevolezza (Mason, 1998 e Mason, 2008), la pratica riflessiva (Jaworski, 1998) e la costituzione di una piccola, ma consolidata, *communities of inquiry* (Jaworski, 2006).

Nel caso della mia ricerca, i docenti che hanno accolto le sperimentazioni in aula hanno popolato la mia *communities of inquiry* con la quale ho condiviso materiali relativi ai percorsi didattici. L'analisi dei loro commenti, mi ha permesso poi di ottimizzare i percorsi didattici relativamente alle finalità preposte per l'apprendimento di concetti matematici specifici.

3.5 Atteggiamenti, convinzioni ed emozioni nella didattica della matematica

Questa sezione è dedicata ad un aspetto che ritengo di importanza primaria nell'ambito della didattica della matematica. E' un aspetto che tocca da vicino anche la pratica del liceo matematico, particolarmente impegnato nella costruzione di atteggiamenti positivi verso la matematica.

Nella didattica della matematica il focus è normalmente rivolto ai contenuti e a come insegnarli. La riflessione contemporanea sull'insegnamento sta progressivamente riservando maggiore spazio all'indagine sugli atteggiamenti nel dominio della comprensione delle materie.

Nei suoi lavori, per esempio, Lee S. Shulman individua tre differenti componenti necessarie per l'insegnamento, *curricular knowledge* (CK), ovvero la padronanza della disciplina che l'insegnante deve insegnare, *subject matter knowledge* (SMK), che riguarda le teorie e le strategie didattiche applicabili alle diverse discipline, e *pedagogical content knowledge* (PCK), cioè una forma di conoscenza che combina il sapere disciplinare con le strategie didattiche più efficaci per insegnarlo. Quest'ultimo aspetto ha rappresentato la vera innovazione nell'ambito della didattica, focalizzando l'interesse non sulla competenza del contenuto in sé ma su come lo si insegna, contemplando i modi più efficaci per rappresentare e spiegare un concetto, le difficoltà e le misconcezioni più comuni degli studenti e le strategie specifiche per facilitare la comprensione dei concetti complessi. (Shulman, 1986). Ball et al. hanno ulteriormente sviluppato il quadro teorico di Shulman, per indagare su come la PCK si distingue dalle altre forme di conoscenza (come la SMK e la PK), e come possa essere applicata in modo pratico nell'insegnamento, con implicazioni concrete per la formazione degli insegnanti nonché il miglioramento dell'insegnamento stesso. Il modello da loro proposto, *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), ovvero «*a practiced-based theory of the knowledge of mathematics entailed by the work of teaching mathematics*»⁸, non considera solo la semplice conoscenza del contenuto quanto la capacità di usare la matematica in modo tale da soddisfare le esigenze specifiche della didattica, considerando le dinamiche di insegnamento e le difficoltà comuni degli studenti (Ball et al., 2009).

Negli ultimi tempi, la didattica della matematica ha visto dunque un crescente interesse per la comprensione dei fattori affettivi e cognitivi e come le loro interazioni influenzino l'apprendimento degli studenti. Le difficoltà in matematica non vengono

⁸Una teoria basata sulla pratica della conoscenza della matematica implicata nel lavoro dell'insegnamento della matematica. (t.d.a.)

più interpretate solo in chiave cognitiva, ma anche in relazione a fattori metacognitivi e affettivi. L'idea che l'atteggiamento degli studenti sia determinante per il loro successo è sempre più diffusa, tanto da essere inclusa negli obiettivi educativi ufficiali del Ministero dell'Istruzione (Di Martino, 2007). Ci si è resi conto della necessità di soffermarsi su aspetti in genere poco considerati ovvero alcuni comportamenti ricorrenti da parte degli studenti in caso di fallimenti ripetuti (Zan, 2007). In tale ambito, il contesto affettivo si può considerare suddiviso in atteggiamenti (*attitude*), credenze o convinzioni (*beliefs*) ed emozioni (*emotion*). In ciascun costrutto affettivo si può rilevare una componente emotiva ed una cognitiva con gradazione variabile (McLeod, 1992).

In generale, un atteggiamento è una predisposizione a rispondere in un certo modo ad una persona, a un'idea o semplicemente ad un oggetto, e descrive come ci si sente e come si reagisce di fronte a un determinato oggetto o situazione. Nel contesto della didattica della matematica gli atteggiamenti si riferiscono alle opinioni, ai sentimenti e alle reazioni generali che si hanno nei confronti della disciplina. Possono variare da positivi, come l'apprezzamento e l'interesse, a negativi, come l'ansia e l'avversione, e possono influenzare profondamente il modo in cui gli studenti si impegnano, giocando così un ruolo cruciale nel determinare il successo scolastico e l'affezione alla materia.

E' importante distinguere tra 'atteggiamenti negativi verso la matematica' e 'ansia matematica'. L'ansia è una condizione emotiva che può derivare da vari fattori, incluse le esperienze passate, mentre gli atteggiamenti sono una struttura più generale che comprende anche elementi cognitivi e comportamentali. L'ansia si ritiene possa contribuire a una percezione negativa della matematica, creando un circolo vizioso che impedisce il successo. Gli insegnanti hanno un ruolo cruciale nel mitigare l'ansia attraverso pratiche didattiche che favoriscono la comprensione relazionale e un ambiente di apprendimento accogliente e sereno (Di Martino e Zan, 2011a).

Le convinzioni, in generale, rappresentano ciò che si pensa e che si ritiene, influenzano il pensiero delle persone e, in uno scenario educativo, quello dei docenti e degli studenti. Le convinzioni degli insegnanti, ovvero le credenze profonde che hanno su una determinata materia o esperienza, naturalmente influenzano le loro pratiche didattiche e di conseguenza anche le convinzioni e gli atteggiamenti verso la disciplina da parte degli studenti. È dunque importante riflettere sulle credenze dei docenti al fine di migliorare l'educazione matematica (Leatham, 2006). Esse sono profondamente radicate e spesso si formano attraverso il percorso scolastico, le esperienze personali e culturali, e anche le influenze sociali. Pertanto, sono più stabili e interiorizzate rispetto agli atteggiamenti e, di conseguenza, tendono a essere più difficili da modificare. (Pajares, 1992).

Le emozioni, infine, si riferiscono ai sentimenti e alle reazioni emotive che si provano nei confronti della matematica. Queste possono riguardare ansia, paura, gioia, o interesse e giocano un ruolo cruciale nell'atteggiamento generale di uno studente verso la disciplina, eventualmente influenzando il suo coinvolgimento ed il suo successo in matematica.

Nella didattica della matematica, le convinzioni, gli atteggiamenti e le emozioni sono fondamentali per comprendere il comportamento degli insegnanti e degli studenti e il relativo impatto sull'apprendimento.

Mi soffermo sul costrutto degli atteggiamenti. La diagnosi di un atteggiamento negativo è spesso vista come un punto di arrivo, una condizione immutabile che implica una sorta di resa educativa. In realtà, un approccio più consapevole alla didattica della matematica, che tenga conto degli aspetti affettivi, può contribuire a migliorare il rapporto degli studenti con la disciplina e a prevenire il diffuso atteggiamento negativo (Di Martino, 2007).

Gli atteggiamenti non sono né statici né rigidamente legati alle capacità di un individuo, ma interagiscono con una vasta gamma di fattori, tra cui le esperienze passate, il contesto educativo e le aspettative di insegnanti e familiari. Un aspetto fondamentale che influisce sugli atteggiamenti è il tipo di comprensione sviluppata dagli studenti. La *comprensione strumentale* implica l'apprendimento di regole e procedure senza necessariamente comprenderne il significato, mentre la *comprensione relazionale* riguarda l'acquisizione profonda dei concetti matematici e delle loro interrelazioni. La comprensione relazionale può contribuire a sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica (Skemp, 1976). Un atteggiamento positivo è spesso legato a una comprensione più profonda e relazionale della matematica, mentre un approccio strumentale può contribuire ad atteggiamenti negativi o ambivalenti. (Di Martino e Zan, 2011b).

Purtroppo, cambiare un atteggiamento negativo verso la matematica è un processo lungo e complesso. Non basta un intervento breve o isolato per trasformare un atteggiamento, poiché esso si costruisce nel tempo attraverso esperienze ripetute. Si rivela necessario un intervento educativo consapevole e continuo, in cui i docenti e le scuole creino ambienti di apprendimento sereni e accoglienti per la matematica (Di Martino e Zan, 2010). I docenti, dunque, giocano un ruolo chiave nel modellare e modificare gli atteggiamenti degli studenti: le loro pratiche didattiche, le interazioni e le aspettative influenzano profondamente le percezioni e le emozioni degli studenti nei confronti della matematica. Un insegnamento che incoraggia la partecipazione attiva, promuove la curiosità e favorisce relazioni significative, come quello proposto dal liceo matematico, può contribuire a sviluppare negli studenti un atteggiamento positivo nei confronti della disciplina.

Gli studi sulla relazione tra atteggiamento e apprendimento della matematica mirano principalmente a individuare un nesso di causa ed effetto tra un atteggiamento positivo e il successo in questa disciplina. I ricercatori hanno indagato l'atteggiamento attraverso strumenti, prevalentemente questionari, che lo collegano a credenze ed emozioni, portando così alla formulazione di definizioni multidimensionali del concetto (Di Martino e Zan, 2011b e Di Martino e Sabena, 2011).

Le teorie più recenti si basano su un modello multidimensionale tripartito, articolato nelle dimensioni *cognitiva*, *emotiva* e *comportamentale* (Eagly e Chaiken, 1998). Nell'ambito dell'insegnamento della matematica, molte definizioni esplicite di atteggiamento verso la disciplina si rifanno a questo modello (Di Martino e Zan, 2011b). In un approccio olistico che tiene conto delle componenti cognitive, affettive e comportamentali si rivela fondamentale un intervento educativo lungo e consapevole che consenta di favorire lo sviluppo di atteggiamenti positivi. (Di Martino, 2013).

Nello specifico, la *dimensione cognitiva* è legata alle convinzioni che una persona ha sulla matematica (ad esempio, se la vede come utile, difficile, o interessante), quella *emotiva* è riferita alle emozioni che la matematica suscita (ad esempio,

ansia, piacere, frustrazione) mentre quella comportamentale riguarda le reazioni e i comportamenti che una persona mette in atto di fronte a compiti matematici (ad esempio, evitare o ricercare situazioni in cui applicare la matematica). Tale modello tripartito aiuta a comprendere come gli atteggiamenti si formano e influenzano il comportamento, sottolineando l'interconnessione tra pensieri, emozioni e azioni.

Vi sono altri approcci che cercano di misurare l'atteggiamento attraverso strumenti standardizzati (come ad esempio i questionari) senza tenere conto del contesto e dell'esperienza personale degli studenti. Il costrutto introdotto da Di Martino e Zan (Di Martino e Zan, 2011b e Di Martino e Zan, 2014), noto come TMA (*Three-dimensional Model for Attitude*) e illustrato in figura 3.7, propone un modello multidimensionale per l'analisi degli atteggiamenti verso la matematica. Si tratta di un modello di tipo *grounded*, ovvero sviluppato a partire dai dati raccolti (Glaser e Strauss, 1976). Esso si articola in tre componenti fondamentali: emozione, visione e autoefficacia.

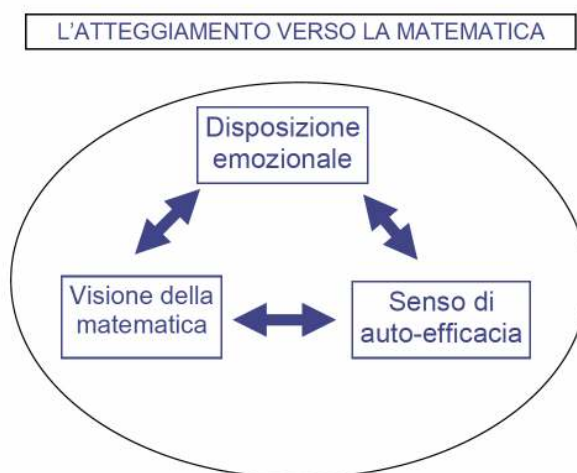


Figura 3.7. Costrutto TMA per l'atteggiamento nei confronti della matematica Di Martino Zan

Rispetto alle precedenti definizioni di atteggiamento, il TMA introduce un approccio più complesso, considerando l'intreccio dinamico tra queste tre componenti e superando la tradizionale dicotomia positivo/negativo. Un atteggiamento negativo verso la matematica, infatti, non si riduce alla sola avversione emotiva, ma può derivare da una visione distorta della disciplina o da una bassa percezione delle proprie competenze.

Il TMA crea un collegamento esplicito tra convinzioni ed emozioni, prendendo in considerazione sia le credenze degli studenti (su sé stessi e sulla matematica) sia le emozioni che emergono nel processo di apprendimento, insieme alle interazioni tra questi elementi. In questo quadro, l'atteggiamento non è visto come una semplice opinione o un'emozione isolata, ma come una struttura complessa in cui le tre componenti si influenzano reciprocamente.

Il modello si basa sull'analisi delle narrazioni autobiografiche degli studenti relative alle proprie esperienze con la matematica, adottando un approccio interpretativo.

Questo significa che non si limita a misurare atteggiamenti predefiniti, ma mira a comprendere il significato e l'origine delle emozioni e delle credenze degli studenti all'interno del loro contesto specifico.

Le tre componenti sono ricondotte a dicotomie, in modo da poter descrivere diversi profili di atteggiamento. Vediamo nel dettaglio. Una disposizione emotiva può essere espressa con 'mi piace/ non mi piace' e rappresenta lo stato d'animo verso la matematica.

La visione può essere espressa con 'la matematica è...', rappresenta la percezione che si ha della matematica, ossia delle sue applicazioni e del suo valore nella vita quotidiana e nel contesto educativo. Essa può influenzare profondamente il modo in cui si approccia alla matematica e alle esperienze di apprendimento. L'autoefficacia infine, può essere espressa con 'sono in grado di fare/non sono in grado di fare', riguarda la competenza percepita in matematica, percezione di controllabilità del successo, ovvero la fiducia riposta nelle proprie capacità matematiche e si riferisce alla convinzione di essere in grado o meno di affrontare e risolvere problemi matematici. Un alto senso di autoefficacia può contribuire a un atteggiamento positivo verso la matematica, incoraggiando gli studenti a impegnarsi e perseverare di fronte alle difficoltà.

Fra le loro correlate come ad esempio 'non mi piace la matematica perché...' mettono in evidenza inoltre la relazione della disposizione emotiva con la visione. In questo costrutto, l'interazione tra le tre componenti è cruciale per comprendere gli atteggiamenti: le tre componenti interagiscono tra loro, influenzando le esperienze degli studenti e le loro prestazioni. È, pertanto, importante analizzare come questi elementi possano essere integrati nella formazione degli insegnanti, affinché vengano applicati nelle pratiche didattiche con l'obiettivo di migliorare gli atteggiamenti degli studenti nei confronti della matematica. Tale aspetto dell'interazione tra le componenti differenzia questo costrutto da quello multidimensionale che può essere visto come una classificazione di aspetti distinti ma non approfondisce necessariamente le interazioni tra di essi (Di Martino e Zan, 2010 e McLeod, 1992).

Di Martino e Zan (Di Martino e Zan, 2011b) evidenziano la stretta relazione tra un atteggiamento negativo verso la matematica e una visione strumentale della disciplina, nella quale il successo è inteso principalmente come la capacità di fornire risposte corrette. Questo legame è rafforzato da credenze degli studenti che associano la matematica a un sistema rigido di regole e procedure, piuttosto che a un'attività di costruzione concettuale. La percezione dell'autoefficacia poi è profondamente influenzata dal modo in cui lo studente interpreta (visione) il successo e l'errore in matematica.

Per contrastare questa dinamica, è fondamentale promuovere un'idea di matematica centrata sulla comprensione dei processi piuttosto che sulla mera applicazione di regole. In questa prospettiva, il successo non dovrebbe essere misurato esclusivamente attraverso la correttezza delle risposte, ma piuttosto in funzione della capacità di sviluppare processi di pensiero significativi. Un ruolo chiave in questo processo è svolto dall'organizzazione della didattica, che deve tenere conto della gestione del tempo in classe e della diversità dei bisogni degli studenti, al fine di creare un ambiente di apprendimento più inclusivo e motivante.

Il quadro teorico degli atteggiamenti, delle emozioni e della percezione della matematica sottolinea l'importanza di una comprensione profonda e significativa della

disciplina. Per promuovere un apprendimento matematico efficace, è fondamentale che gli insegnanti siano consapevoli di queste dinamiche e adottino le strategie adeguate. All'interno di questo quadro mi sono mossa per riflettere sulla didattica proposta nel liceo matematico ed inoltre, in maniera indiretta, per la progettazione dei percorsi didattici.

Nel lavoro presentato nel capitolo 8 di questa tesi, ho scelto di adottare il costrutto TMA, di Di Martino e Zan, per analizzare gli atteggiamenti di studenti e docenti verso la pratica del liceo matematico.

Ritengo che la riflessione sugli atteggiamenti possa aiutare gli insegnanti a sviluppare strategie più efficaci per affrontare le sfide emotive e cognitive che gli studenti affrontano nell'apprendimento della matematica, portando così a un miglioramento complessivo delle loro esperienze educative. Infatti, mentre in passato si pensava che atteggiamenti positivi fossero automaticamente correlati a prestazioni migliori, la ricerca suggerisce che questa relazione è più complessa. Le lenti per l'osservazione degli studenti fornite da tale modello possono aiutare gli insegnanti a gestire la complessità dei problemi relativi all'apprendimento della matematica.

Promuovere, dunque, una visione della matematica incentrata sui processi piuttosto che sui prodotti, incoraggiando gli studenti a spostare l'idea di successo dalla produzione di risposte corrette all'attuazione di processi di pensiero significativi, può contribuire a prevenire o superare disposizioni emotive negative verso la matematica.

Capitolo 4

Strumenti di supporto alla didattica della matematica

L'innovazione tecnologica ha trovato una naturale collocazione anche nel mondo scolastico e più in generale nella formazione. L'introduzione di strumenti tecnologici innovativi nella didattica della matematica può contribuire a migliorare l'apprendimento concettuale e lo sviluppo del pensiero matematico.

L'uso delle tecnologie va ad incidere su alcuni aspetti relativi alla ricerca nel campo dell'educazione matematica. A tal proposito, trovo particolarmente interessanti le riflessioni di Raymond Duval, il quale distingue tra *visione*, ovvero la semplice percezione visiva di un oggetto, e *visualizzazione*, che riguarda la costruzione mentale dell'oggetto stesso. Quest'ultima può avvenire attraverso *rappresentazioni semiotiche* (come simboli o diagrammi) o *rappresentazioni fisiche* (come modelli tridimensionali), svolgendo così un ruolo cruciale nella comprensione dei concetti geometrici, in particolare nella geometria dello spazio (Duval, 1991).

Le rappresentazioni semiotiche includono le rappresentazioni simboliche, algebriche o grafiche. Le rappresentazioni fisiche permettono agli studenti di manipolare concretamente le forme e sviluppare una comprensione intuitiva delle relazioni spaziali.

Questa distinzione è utile per comprendere le potenzialità offerte dalle tecnologie nella didattica della matematica. Come sottolinea Anna Sfard (Sfard, 1991), il passaggio da una rappresentazione all'altra – ad esempio dal concreto all'astratto o dal visivo al simbolico – è una delle chiavi per il successo nell'apprendimento matematico. L'integrazione di strumenti digitali e manufatti concreti nella didattica permette quindi di colmare il divario tra percezione intuitiva e formalizzazione concettuale, facilitando un apprendimento più profondo e significativo. Il pensiero matematico si può così sviluppare attraverso un processo di oggettivazione, in cui concetti inizialmente percepiti come procedure operative vengono progressivamente riformulati in termini di entità autonome e manipolabili. (Sfard, 2008).

In questa prospettiva, Efraim Fischbein (1993) introduce la teoria dei *figural concepts*, evidenziando come le figure geometriche non siano percepite unicamente come entità visive, ma siano anche soggette a vincoli concettuali. Questo significa che uno stesso oggetto può essere interpretato in modi diversi a seconda del contesto e dell'esperienza dello studente (Fischbein, 1993). La combinazione di percezione

visiva, costruzione cognitiva e rappresentazione simbolica gioca quindi un ruolo chiave nell'apprendimento della geometria e nell'uso di strumenti tecnologici innovativi per la sua didattica.

L'uso di manifattura additiva, intesa come modellazione e stampa 3D, permette di realizzare una rappresentazione fisica, utile, ad esempio, per la visualizzazione di solidi e delle loro sezioni, in particolare quelle coniche. La possibilità di progettare e manipolare oggetti matematici attraverso modelli tridimensionali consente agli studenti di costruire significati più profondi, trasformando concetti astratti in entità esplorabili concretamente. L'apprendimento può essere favorito dalla creazione di artefatti matematici, rendendo la manifattura additiva uno strumento didattico particolarmente potente (Piaget, 1950 e Papert, 1980). Ciò risulta coerente con quanto sostenuto da Lakoff & Núñez, ovvero che la comprensione di concetti matematici è radicata nell'esperienza corporea e sensomotoria, ovvero nella cognizione incarnata (Lakoff e Núñez, 2000).

Parallelamente, il software di geometria dinamica, come GeoGebra, può essere considerato come un mediatore semiotico permettendo agli studenti di interagire con gli oggetti matematici, in modo nuovo, trasformandone la rappresentazione e le modalità di esplorazione. L'ambiente dinamico permette agli studenti di sviluppare congetture attraverso l'interazione diretta con le figure, favorendo una modalità di apprendimento basata sulla semiotica visivo-dinamica ((Sedig e Sumner, 2006) e Arzarello et al., 2011).

4.1 Il software di geometria dinamica GeoGebra come strumento didattico

Nei percorsi didattici presentati in questa tesi ho previsto l'utilizzo in particolare del software di geometria dinamica, GeoGebra.

GeoGebra è un software gratuito che combina strumenti per la geometria, l'algebra, il calcolo e la statistica. Questo ambiente interattivo si distingue per la capacità di stimolare l'esplorazione e favorire così una comprensione concettuale profonda, rendendolo particolarmente adatto per studenti di ogni livello scolastico. GeoGebra favorisce interazioni tra lo studente e il programma, che rendono visibili e manipolabili gli oggetti matematici, consentendo una loro esplorazione dinamica. Lo studente può esplorare, osservare, formulare congetture e verificarle, stimolando così un'osservazione arricchita degli enti geometrici, come nel caso di grandezze variabili, covarianti o invarianti. Una funzione particolarmente significativa è la funzione trascinamento, che, attraverso l'uso del cursore, permette di modificare gli elementi di una figura generando varianti della stessa tipologia. Questo processo supera i limiti del disegno tradizionale, offrendo un ampio spettro di rappresentazioni dinamiche di una figura e permettendo di visualizzare trasformazioni e relazioni in modo concreto.

Inoltre, GeoGebra facilita il dialogo tra docente e studente, offrendo un contesto ideale per la negoziazione del significato. Promuove una partecipazione attiva e riflessiva, elementi centrali per un apprendimento significativo, incrementando al contempo la motivazione, l'autonomia e il pensiero critico degli studenti. Questo

ambiente supporta lo sviluppo della capacità di esplorare congetture matematiche e risolvere problemi in modo creativo e indipendente (Zbiek et al., 2007).

GeoGebra può essere interpretato come un artefatto per l'apprendimento della matematica, un potente mediatore per la costruzione di concetti complessi attraverso modalità di apprendimento attive e visive. Tale prospettiva trova fondamento nella teoria della *commognition* di Anna Sfard, secondo cui l'apprendimento matematico non è solo un processo cognitivo individuale, ma un fenomeno sociale che si sviluppa attraverso la comunicazione. In questa visione, il linguaggio, inteso come un sistema di segni, è lo strumento attraverso cui si dialoga e si costruiscono significati matematici condivisi. GeoGebra, in quanto artefatto, stimola conversazioni che favoriscono la costruzione collettiva di concetti matematici (Sfard, 2008).

GeoGebra può essere considerato anche un mediatore semiotico che agevola le interazioni discorsive. Come sottolineato da Radford (Radford, 2008), il significato matematico non è una proprietà intrinseca degli artefatti, ma emerge dal loro utilizzo in contesti sociali e interattivi. In questa ottica, GeoGebra non si limita a essere uno strumento tecnico, ma diventa un elemento chiave per favorire il dialogo, l'esplorazione e la costruzione di conoscenze matematiche condivise.

Nei miei percorsi ho fatto uso delle classi GeoGebra, un particolare strumento che consente al docente di implementare progetti didattici anche complessi, rendendoli fruibili agli studenti in una modalità nella quale interagiscono con il programma per esplorare costruzioni che portano alla risoluzione del problema. Contemporaneamente, il docente ha la possibilità di monitorare i progressi degli studenti in tempo reale e fornire un ritorno. Questa funzionalità promuove un approccio didattico personalizzato e partecipativo, migliorando l'efficacia dell'apprendimento. In aggiunta, ho fatto uso del libro GeoGebra, uno strumento digitale che consente di organizzare e strutturare materiali didattici interattivi. Attraverso la combinazione di applet, esercizi e spiegazioni in un unico spazio integrato, il libro GeoGebra si è rivelato un prezioso supporto per creare risorse didattiche dinamiche, facilmente accessibili e coinvolgenti per gli studenti. Inoltre, dotandosi di un account personale su GeoGebra lo studente può conservare e revisionare il proprio lavoro mentre il docente può seguirne l'evoluzione.

Capitolo 5

Proposta di un percorso didattico interdisciplinare tra latino e matematica

5.1 L'importanza di percorsi interdisciplinari tra latino e matematica

Nel riconoscere il valore didattico e cognitivo dei problemi matematici conosciuti anche attraverso la lente della loro evoluzione storica, la matematica quasi naturalmente incrocia la sua vicenda con quella della lingua latina, la quale, nello sviluppo della cultura europea moderna, è stata la lingua veicolare del sapere anche della scienza fino ai margini dell'Ottocento. o e sociale di un tempo e uno spazio particolari.

L'uso combinato del latino e della matematica in un contesto didattico, realizza quell'interdisciplinarietà che sempre si cerca nella pratica didattica, ma che è così difficile da realizzare sia per mere questioni organizzative sia per una intrinseca difficoltà a definirne i confini e misurarne i benefici. Ovviamente, ciò trova una forza naturale all'interno dei licei scientifici e classici - esclusa l'opzione scienze applicate del liceo scientifico, che non prevede l'insegnamento del latino - particolarmente efficiente quando si appoggia anche sulla sperimentazione del liceo matematico. Lo studio del latino al liceo è una grande opportunità e la sperimentazione del liceo matematico fornisce la base organizzativa necessaria per strutturare un percorso che va verso una reale innovazione della didattica. L'attingere dalle fonti originali, infatti, richiede, in una interazione continua tra i due saperi, da un lato l'analisi in chiave diacronica e filologica del latino e dall'altra l'interpretazione del pensiero scientifico del tempo, diventando così i testi il *boundary object* per il latinista ed il matematico, ovvero un oggetto analizzato con sensibilità differenti da comunità diverse (*vd.* paragrafo 3.3). Già Calvino aveva individuato tale confine valicabile in una linea ideale Dante-Galilei- Leopardi: 'Non è scandaloso accostare Galilei a Dante: l'opera letteraria come mappa del mondo e dello scibile, la scrittura mossa da una spinta conoscitiva. La scienza e la filosofia naturale sono la vocazione della letteratura italiana, che coinvolge altri grandi autori come L. Ariosto e G. Leopardi' (Calvino, 1968).

Tramite la lettura dei testi originali in latino, si realizza un accesso non mediato alle fonti, avvicinandosi ai processi cognitivi che hanno prodotto i nuovi concetti. La lingua segue inoltre la genesi dei nuovi concetti anche tracciandone lo sviluppo in un nuovo lessico latino necessario alla loro espressione. L'analisi diacronica del latino e del relativo lessico affianca così la ricostruzione del pensiero scientifico e matematico di scienziati come Galilei, Newton, Linneo, per citarne alcuni, che fino a oltre la metà dell'800 hanno scritto in latino.

L'uso delle fonti originali in latino in un contesto didattico, costituisce un'impresa certamente ambiziosa, ma al contempo gratificante nell'approfondire sostanzialmente la comprensione della matematica. A tal riguardo mi piace riportare le parole di *Hans Niels Jahnke*: «La lettura delle fonti primarie può aiutare a chiarire ed estendere ciò che si trova nella letteratura secondaria, discernere le tendenze generali nella storia di un argomento, mettere in prospettiva alcune delle interpretazioni o anche travisamenti riscontrati in letteratura »(Jahnke et al., 2000). Lo studio della matematica attraverso testi storici è dunque capace di generare uno shock culturale, mediante il quale è possibile sperimentare la sostituzione, il riorientamento, e l'orientamento culturale, come si usa dire nel descrivere gli effetti dell'uso delle fonti storiche nella didattica (vd. paragrafo 3.2.2). La lettura però, come ho prima evidenziato, non deve essere teleologica, cioè il testo non deve essere analizzato solo dal nostro punto di vista e con le nostre conoscenze attuali. I testi vanno contestualizzati nel loro tempo. E' chiaro che i concetti matematici hanno una genesi ed una evoluzione e la storia ci aiuta a collocare lo sviluppo della matematica nel contesto scientifico. L'attenzione all'approccio storico al pensiero scientifico, si ritrova anche nelle indicazioni nazionali¹. Infatti, nell'ambito delle linee generali e competenze per l'insegnamento della matematica, viene richiesto di fornire allo studente 'una visione critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, [lo studente n.d.r.] avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.'

L'inclusione della prospettiva storica nella didattica della matematica da una parte consente di ripercorrere i passaggi fondamentali di una scoperta, in quello che viene definito un approccio genetico (vd. paragrafo 3.2.1) dall'altra consente in modo naturale di esplorare percorsi interdisciplinari, importanti per riattivare quelle interconnessioni tra discipline che a causa delle specializzazioni disciplinari, sembrano svanire o non essere più riconoscibili.

Una considerazione a *latere*, riguarda la sostenibilità degli studi umanistici in ambito classico. Dai dati disponibili sul sito del MIM si evince che, negli anni seguiti alla riforma del sistema dei licei, si è assistito ad una crescita forte dell'opzione scienze applicate del liceo scientifico (dove non viene insegnato il latino) che rappresenta al

¹vd. sezione Matematica, Linee generali e Competenze.

2022/23 il 10% degli iscritti alle scuole secondarie a fronte della opzione tradizionale che ne rappresenta il 14% e al liceo classico che ne rappresenta il 6,2 % . Si tenga presente che nell'a.s. 2010-11 il 21,1% degli iscritti alle scuole secondarie sceglieva il liceo scientifico tradizionale mentre il 3,8% degli iscritti sceglie il liceo scienze applicate (Notiziario statistico MIM). Questo *trend* depotenzia una caratteristica del liceo scientifico tradizionale e che in realtà rappresenta una ricchezza, come intendo dimostrare attraverso il percorso didattico presentato nel paragrafo 5.3, ovvero la simultanea presenza dello studio della lingua latina e della matematica.

La riduzione progressiva delle cattedre di latino, nel trasferimento degli studenti dalla opzione tradizionale a quella delle scienze applicate del liceo scientifico, si ripercuote a cascata sul sistema universitario andando a chiudere ulteriori spazi di vitalità allo studio della lingua e della cultura latina.

Da tutte queste riflessioni è nata in me l'idea di organizzare un *workshop* sull'interdisciplinarietà dei due saperi nell'ambito della scuola secondaria di secondo grado, al fine di creare un punto di confronto operativo tra la comunità scolastica e universitaria delle due discipline, che fosse in grado di produrre spunti per attività interdisciplinari da inserire in un nuovo percorso liceale tra queste due materie così importanti nel curriculum dei licei.

Come esplicherò di seguito, il workshop, tenutosi nella sua prima edizione nel Dicembre 2023, ha consentito di enucleare una serie relazioni tra le due discipline che permettono di realizzare, nel concreto della pratica didattica, percorsi interdisciplinari. Il grande successo riscontrato da questa iniziativa, probabilmente, è dovuto al fatto che il *workshop* ha consentito a due comunità scientifiche, apparentemente distanti tra loro, di lavorare su temi di comune interesse e al contempo di rispondere ad una esigenza sentita da molti, benché non esplicitata chiaramente prima d'ora.

5.2 Il workshop latino e matematica nella scuola secondaria di secondo grado. I edizione

All'interno di questa riflessione su come progettare nuovi e al contempo possibili ed efficaci percorsi interdisciplinari, ho riconosciuto come esigenza fondamentale quella di un confronto su questi temi con la comunità dei docenti, sia al livello scolastico sia universitario. La comunità dei docenti e quella degli studiosi non sempre riesce ad incontrarsi su un terreno comune, come può essere quello dell'innovazione nella pratica didattica. Non sempre il mondo della ricerca si confronta con i fortissimi vincoli che la complessità della pratica didattica impongono, pratica che ha poi come elementi vivi gli studenti, con le loro capacità, volontà e disposizione ad apprendere, elementi da conquistare quotidianamente sul campo, in classe.

Lo strumento da me individuato per esplicitare tale confronto è stato il *workshop* sulla tematica dell'interdisciplinarietà tra latino e matematica che, abbiamo deciso di organizzare, assieme a diversi esponenti di alcuni dipartimenti di matematica e di latino. Abbiamo riconosciuto tale tema come potenzialmente fecondo di nuove idee e applicazioni didattiche nelle scuole. Il passaggio dall'ideazione all'organizzazione e realizzazione del *workshop* ha richiesto diverse fasi. Innanzitutto, sono stati trovati degli interlocutori esperti, interessati sia nel campo matematico sia nel campo del latino. Si è dunque costituito un comitato scientifico multidisciplinare composto,

per quanto riguarda matematica, da: Claudio Bernardi (Sapienza, Dipartimento G. Castelnuovo), Francesca Coppa (Sapienza, Dipartimento G. Castelnuovo), Marta Menghini (Sapienza, Dipartimento G. Castelnuovo); e per quanto riguarda latino da: Maria Jennifer Falcone (Università di Pavia), Andrea Cucchiarelli (Sapienza, Dipartimento Scienze dell'Antichità), Paolo D'Alessandro (Università Roma Tre), Giorgio Piras (Sapienza, Dipartimento Scienze dell'Antichità), Francesco Ursini (Sapienza, Dipartimento Scienze dell'Antichità).

I lavori hanno avuto inizio nei primi di maggio 2023, e sono proseguiti per circa sette mesi, considerato che il *workshop* si è svolto nei giorni 15-16 dicembre 2023.

La cornice di riferimento è stata la ricostruzione del pensiero scientifico e matematico attraverso l'analisi del latino, come lingua della scienza, nella sua evoluzione temporale. Sul piano matematico si è trattato di esplorare lo sviluppo di concetti matematici e del relativo lessico specialistico. Sul piano del latino si è esplorata l'evoluzione del lessico e delle strutture, che diventano via via più semplici, come del resto accade oggi con l'inglese scientifico, proprio per permettere una trasmissione dei contenuti più diretta e meno ambigua. Questa semplificazione porta vantaggi anche allo sviluppo e alla comunicazione della matematica, che a sua volta deve adeguare al nuovo linguaggio la descrizione degli oggetti di cui tratta. Per il latinista si presenta dunque un'occasione per una riflessione sul tema dei rapporti tra il latino e la matematica, non solo nel mondo antico, ma anche nel Medioevo e certamente nell'Età moderna.

Si è potuto quindi riflettere sulle possibilità di ampliamento del canone dei testi proposti per l'insegnamento nelle scuole secondarie, con l'idea di differenziare le letture e favorire un approccio interdisciplinare nelle scuole secondarie di secondo grado, avendo particolare attenzione ai licei matematici.

Hanno partecipato al convegno docenti di scuola secondaria, dottorandi e dottori di ricerca e professori universitari di matematica, lingua e letteratura latina e filologia classica.

I contributi presentati sono stati incentrati sull'utilizzo didattico dei temi proposti, soprattutto nella cornice del liceo matematico. La didattica del LM riconosce, infatti, il valore didattico e cognitivo della dimensione storica della matematica, rendendo agli studenti una materia viva e pulsante e soprattutto aperta ed in fieri, che può stimolare e premiare la loro creatività. Tutto questo si pone in contrasto con la didattica tradizionale nelle classi, che fatica sempre di più ad attrarre l'attenzione e la creatività degli studenti, creando le condizioni che rendono le carriere STEM così difficili da essere intraprese per le nuove generazioni.

Le tematiche scelte come portanti sono state le seguenti:

- Il latino come lingua della scienza
- La cultura matematica e scientifica nell'antichità.

Le conferenze di apertura sono state curate da esperti del settore, rispettivamente il latinista Paolo d'Alessandro (RomaTre) e lo storico della matematica Paolo Freguglia (Università dell'Aquila) nella loro conferenza 'Il latino come lingua della scienza' hanno presentato l'evoluzione del latino nella e per la matematica dalle origini, passando per il rinascimento, fino ad arrivare ai tempi moderni.

Il latinista Daniele Pellacani (Università di Bologna) e la storica della matematica Veronica Gavagna (Università di Firenze) hanno invece introdotto il tema della cultura matematica e scientifica nell'antichità presentando rispettivamente uno studio su 'geometria e astronomia a partire da Arato, *Phaenomena*, 541-3' e 'il problema della quadratura dei poligoni e la tradizione testuale degli Elementi di Euclide'.

Tutti i contributi hanno fornito molti spunti di riflessione e, in diversi casi, hanno mostrato la possibilità concreta di realizzazione di percorsi didattici interdisciplinari tra latino e matematica. A titolo d'esempio ne riporto qualcuno:

- L'importanza dello studio della matematica nella formazione del perfetto oratore secondo Quintiliano: *vir bonus "geometriae" peritus*, Mariacarolina Santoro, Liceo F. Severi, Salerno.

La lettura del passo al fine di apprezzare che nel mondo latino lo studio della matematica non era trascurato o svalutato, anzi ritenuto indispensabile per la formazione del perfetto *orator* romano dal famoso *rhetor*. Gli studenti riflettono così sul grande valore formativo della matematica in sé, la cui conoscenza è necessaria per preparare al meglio un qualsivoglia professionista di alto livello che operi anche in campi apparentemente lontani dalla disciplina stessa.

- Ritorno ad Alcuino di York: resoconto di un progetto didattico interdisciplinare sulle *Propositiones ad acuendos juvenes*, Pietro Li Causi Sapienza, Erasmo Modica, Liceo Scientifico S. Cannizzaro, Palermo.

Esiti di una sperimentazione in aula relativa allo studio dei testi scelti, in modo da analizzare non soltanto il passaggio da una lingua antica (il latino) all'italiano, ma anche il passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico della matematica moderna.

- Galileo e il latino: esempi retorici e lessicali dal *Sidereus nuncius*, Maria Grazia Palutan, Liceo A. Righi, Roma.

Vengono forniti alcuni spunti di interesse per il rinnovamento del curriculum di italiano e latino nel quarto anno dei licei: Il *Sidereus Nuncius* (1610), la prima opera importante di Galileo e la sua unica di rilievo scritta in latino, presenta infatti molti elementi affascinanti, sia dal punto di vista linguistico che da quello dell'efficacia comunicativa. Leggendone e analizzandone alcune parti, gli studenti potranno entrare nel vivo di una vicenda che ha segnato la storia della scienza.

- Le *Disquisitiones Arithmeticae* di Gauss: proposte per una didattica interdisciplinare tra matematica e latino, Antonio Cigliola RomaTre.

Analisi di alcuni brani tratti dalle *Disquisitiones Arithmeticae* e riflessione su quanto diffusamente il latino sia stato usato in età moderna per le comunicazioni scientifiche.

- Problemi matematici nel *Corpus agrimensorum Romanorum*: tre proposte didattiche, Luca Rovati, Università Roma Tre.

Percorso didattico costituito da tre sessioni, proponibili come tra loro indipendenti o legate, per studenti tra primo-secondo e di quinto anno di liceo classico, scientifico o matematico, tra letteratura tecnico-scientifica, matematica elementare, storia della matematica e storia romana.

- L'algoritmo latino, Ginevra Presen, Martina D'Antoni, Francesco Esposito, Liceo Peano, Monterotondo.

Nuovo approccio didattico che unisce la grammatica latina con concetti matematici e informatici per scardinare l'idea che le materie umanistiche e quelle scientifiche viaggino su due binari paralleli. Si utilizzano strumenti matematici per analizzare la struttura delle frasi latine, evidenziando i legami sintattici e grammaticali. Si esplora l'uso di operazioni matematiche come moltiplicazioni e addizioni per rappresentare le relazioni tra i vari elementi delle frasi.

- L'indeterminismo nelle teorie scientifiche dall'antichità al XVIII secolo, con l'analisi di alcuni testi in latino, Roberto Mori, Giano Rugge, Liceo Majorana, Desio.

Riflessione sul concetto di indeterminismo, attraverso l'analisi di alcuni passi scelti di tre grandi autori che hanno dato spazio a teorie basate sull'indeterminismo: Lucrezio, la cui teoria del clinamen può essere considerata modello di indeterminismo quantistico; Newton, che con il problema dei tre corpi esplora il campo dell'indeterminismo caotico; Daniel Bernoulli, autore dell'Hydrodynamica ed esempio di indeterminismo statistico.

- La declinazione come proporzionalità. Grammatica e matematica in Varrone, *De lingua Latina* 10, 43-44, Renato Oniga, Università di Udine.

Viene analizzato il brano del *De lingua Latina* di Varrone, nel quale il concetto matematico di proporzione è utilizzato per interpretare la declinazione degli aggettivi, conferma la centralità delle proporzioni nella cultura matematica antica, testimoniata dal quinto libro degli *Elementi* di Euclide e dalla poliedrica attività di Eratostene, a cui probabilmente si deve l'applicazione dell'analogia alla grammatica.

- *Certamen mathematicum*, Andrea Basini (Liceo Virgilio, Roma), Silvia Borgognoni (Liceo Pasteur, Roma).

Viene presentata una selezione di quesiti di un *Certamen Mathematicum* svoltosi presso il Liceo Scientifico Louis Pasteur di Roma, in sinergia con altre iniziative come Settimana della Scienza di gare. I quesiti sono estratti da estratti da testi scientifici in latino di vari autori (Fibonacci, Alcuino di York, Newton): viene richiesto allo studente sia la traduzione sia lo svolgimento del problema contenuto nel testo o da esso ispirato.

- La matematica nel mondo classico: proposte di analisi dal *De Arithmetica* di Severino Boezio, Stefania Beduschi, Albertina Riboldi, Liceo B. Russell, Garbagnate Milanese.

Viene presentato un percorso didattico in cui gli studenti, lavorando sul modello delle *Fostering Communities of Learners*, sono invitati a produrre una breve antologia del testo commentata dal punto di vista culturale-letterario, linguistico e matematico. Le conoscenze linguistiche e matematiche pregresse sono strumento per la decodifica e l'interpretazione di un testo inedito in traduzione italiana.

- L'incontro dell'Occidente latino e dell'Oriente arabo: le origini medievali della scienza moderna espresse con il linguaggio di Leonardo Pisano, Laura Tomassi, Università di Roma Tor Vergata.

Analisi, oltre che del testo di Leonardo Pisano, anche delle sue fonti, con riflessioni di carattere matematico, storico, filologico e linguistico. Le metodologie risolutive esposte da Leonardo Pisano, attraverso diagrammi e spiegazioni, sono fonte di ispirazione per attività didattiche volte a formare un pensiero algebrico vivo e consapevole. Viene presentata una ‘matematica umanistica’, che si serve della lingua originale in cui è espressa, come traccia per comprendere la complessità culturale esistente nel Medioevo e come strumento per illustrare la ricchezza dell’incontro tra culture, ove si fondano i presupposti per la nascita della scienza moderna.

Il dettaglio delle attività, i video e le slide degli interventi sono reperibili sulla pagina web del sito del liceo matematico².

La raccolta dei contributi a cura, oltre che mia, di Paolo d’Alessandro (Roma Tre) e Maria Jennifer Falcone (Università di Pavia) è scaricabile al link riportato in nota³ ed ha lo scopo di diffondere il più possibile gli spunti didattici emersi dai lavori. Come ho detto sopra, lo scopo non è la produzione di letteratura scientifica per sé, ma piuttosto la formulazione di proposte didattiche, realizzabili nel contesto della attuale organizzazione scolastica italiana, che innovino la didattica della matematica e del latino usandone le fortissime e uniche sinergie che sono capaci di generare.

La ricchezza e la qualità dei contributi testimonia della necessità colta da molti per una innovazione didattica coraggiosa.

5.3 Il percorso didattico sulla Brachistocrona

Presento nel seguito un percorso didattico interdisciplinare tra latino e matematica per le scuole superiori, in particolare per i licei classico e scientifico. Tale lavoro risponde all’obiettivo di ricerca OAA1 - PERCORSI INTERDISCIPLINARI, nello scenario d’indagine relativo alla definizione di percorsi curricolari per i licei, attraverso l’Introduzione della dimensione storica nei percorsi di didattica della matematica (vd. paragrafo 1.2).

L’ispirazione mi è venuta durante la frequentazione di un corso di storia della matematica, relativo alla nascita del calcolo delle variazioni, tenuto dal prof. Paolo Freguglia, nell’ambito dell’offerta formativa del dottorato presso Sapienza. Ho colto subito la potenzialità di una trasposizione didattica di alcuni dei contenuti presentati, completati dall’interdisciplinarietà col latino. In realtà, da tale considerazione è scaturita in me forte la convinzione di condividere esperienze simili con chi come me sentiva questa esigenza culturale di formazione critica del cittadino. Da ciò, ha preso inizio la ricerca degli interlocutori esperti con cui dialogare che si è concretizzata poi nella realizzazione del workshop latino matematica di cui ho discusso nel paragrafo 5.2.

Il percorso è centrato attorno un problema classico, quello della brachistocrona, ovvero della curva di discesa nel minimo tempo, nel caso in cui un punto materiale si muova senza attrito su una traiettoria sotto l’azione della gravità.

La finalità è quella di far apprezzare agli studenti la portata della rivoluzione scientifica nell’Europa moderna, assaporandola dai testi originali in lingua latina,

²<https://www.liceomatematico.it/2023/07/10/workshop-matematica-e-latino-nella-scuola-secondaria-di-secondo-grado-roma-15-16-dicembre-2023/>

³<https://romatrepress.uniroma3.it/libro/matematica-e-latino-nella-scuola-secondaria-di-secondo-grado-atti-del-workshop-di-roma-15-16-dicembre-2023/>

in modo da ripercorrere la genesi di concetti matematici fondamentali e complessi, che prendono vita tramite la lingua nella quale sono stati descritti, osservando così anche l'evoluzione e la costruzione del linguaggio matematico moderno.

Le vicende che hanno portato alla soluzione del problema, mettono in luce, in maniera emblematica, i nodi che hanno condotto alla crisi della matematica classica⁴, necessitando per il loro scioglimento dei nuovi strumenti del calcolo infinitesimale introdotti da Leibniz e Newton a metà del '600. I testi che supportano questo percorso sono dei classici della letteratura scientifica scritta in latino e consentono di apprezzare come la lingua e la cultura latina si leghino indissolubilmente alle vicende del progresso della scienza nella cultura occidentale dal '600 fino all'epoca moderna in Europa.

Nelle fasi di progettazione e realizzazione mi sono riferita ai quadri teorici relativi all'uso della storia nella didattica e all'interdisciplinarietà, presentati e descritti rispettivamente nei paragrafi 3.2 e 3.3. Il lavoro si contestualizza all'interno della connessione tra *History as a tool Arguments* e *History-based Approaches*. Infatti, il problema della brachistocrona, viene presentato nella sua evoluzione storica, con la finalità di evidenziare il passaggio dalla matematica classica a quella moderna: è l'occasione, per gli studenti, di apprezzare la necessità di nuovi strumenti per la risoluzione di un certo tipo di problemi e, nel contempo, di interagire con sistemi di rappresentazione e modalità dimostrative non loro familiari. L'effetto cercato è quello dello shock culturale (vd. par. 3.2.2), attraverso l'analisi dei testi orientata verso una comprensione di ciò che ha scritto l'autore, collocandolo nel suo periodo storico e non basandosi soltanto sulle nostre conoscenze attuali.

I testi di riferimento sono i *Discorsi e dimostrazioni matematiche* intorno a due nuove scienze (da ora in avanti *Discorsi e dimostrazioni*) di Galilei, il testo della sfida lanciata da Johann Bernoulli per risolvere il problema della curva di minimo tempo, pubblicato negli *Acta Eruditorum* del 1696 e gli articoli di Johann e Jakob Bernoulli pubblicati nella stessa rivista nel 1697 (Bernoulli, 1697a e Bernoulli, 1697b). Tali testi sono stati il *boundary object* per i docenti di matematica, fisica e latino nel condurre la sperimentazione e lo studio⁵. A tal proposito mi piace citare la frase di Michail M. Bakhtin che descrive molto bene lo stato d'animo ed il concetto di *boundary crossing* e *boundary object*: «*I am conscious of myself and become myself only while revealing myself for another, through another, and with the help of another. . . . [E]very internal experience ends up on the boundary*⁶».

Nel percorso si considera inizialmente la posizione del problema ed il primo tentativo di risoluzione, ingegnoso seppur non definitivo, da parte di Galilei nei *Discorsi e dimostrazioni*⁷, per poi passare alle risoluzioni definitive dei fratelli Bernoulli proposte nel 1697. Dal punto di vista della storia della scienza, durante quei pochi anni che vanno dalla pubblicazione dei *Discorsi e dimostrazioni* alla sfida lanciata da Bernoulli, vengono pubblicati nel 1687 i *Principia mathematica* di Newton e nel 1684 la memoria di Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis*,

⁴Per una discussione più ampia vedasi anche Lombardo Radice e Segre, 1967

⁵Per lo studio del linguaggio scientifico in latino si è fatto riferimento a de Monferrier et al., 1838–1849, Galilei, 1890–1907 e Migliorini, 1948.

⁶vd. Bakhtin M., *Problems of Dostoevsky's poetics* (C. Emerson, Trans.), Minneapolis: University of Minnesota Press, 1984, p. 287.

⁷Il testo di riferimento per i miei studi è Galilei, 1890–1907.

testi che sanciscono la nascita del calcolo differenziale. Il confronto critico, guidato dal docente, tra i metodi e gli strumenti matematici che usano Galilei e i fratelli Bernoulli (e più in generale i matematici del settecento) mette in luce l'impossibilità di affrontare con la sola matematica greco-alessandrina problematiche relative alla cinematica, o problemi di massimo e di minimo.

Si accompagnano così gli studenti verso le soluzioni e i metodi del calcolo infinitesimale. Sarà per loro questa l'occasione di confrontarsi, in una nuova situazione didattica, con il concetto di limite che porta al suo interno ostacoli di natura epistemologica (Brousseau, 1997) sia legati alla storia della sua evoluzione sia al linguaggio con il quale è stato affrontato. Gli studenti hanno modo di acquisire familiarità con queste nuove tecniche vedendone, in un caso concreto, le motivazioni ed apprezzandone la progressiva formalizzazione, guidati, nell'evoluzione concettuale, dallo sviluppo storico. Tale riflessione relativa alla cinematica, è tanto attuale, in quanto, ancora oggi, tale argomento viene introdotto nei licei al terzo anno, privato degli strumenti del calcolo infinitesimale, che si introducono solo nel quinto anno, creando quindi un problema fondamentale nella didattica della fisica, in contrasto anche con la naturale evoluzione e sviluppo di tali contenuti, che dovrà essere in qualche modo affrontato e risolto.

Il percorso si completa con una rappresentazione della sfida da parte degli studenti che interpretano un dialogo ideale, benché storicamente impossibile, tra Galilei ed i fratelli Bernoulli. La pratica dell'argomentazione stimola gli studenti a cogliere i nuclei fondanti del contenuto in modo da poterli sostenere poi in contraddittorio. D'altronde anche Galilei si serve del dialogo nei suoi testi più celebri ed in fondo la sfida lanciata da Johann Bernoulli possiamo vederla come un dialogo, seppur asincrono. La tecnica del dialogo consente a Galilei di aggirare il formalismo in certe dimostrazioni che probabilmente non era in grado di sviluppare rigorosamente, spesso a causa dell'insufficienza della matematica prima dell'invenzione del calcolo differenziale, utilizzando ragioni di plausibilità. Non casualmente Galilei si affida alla parola latina *demonstratio*, che veniva usata già da Cicerone per significare sia l'atto di mostrare, esporre, sia la prova e la dimostrazione formale nel senso matematico. Come la farsa, dalla commedia greca di Aristofane in poi, permette di svelare l'indicibile, così il dialogo consente di affermare l'inaffermabile in matematica. Come è noto, questa pratica dell'argomentazione viene oggi spinta dalla metodologia del *Debate*⁸.

Di questo percorso didattico è stata realizzata una sperimentazione, descritta più oltre nel paragrafo 5.10, e presentata durante la prima edizione del Workshop Latino e Matematica (vd. Coppa e Filippi, 2025), oltre che in alcuni convegni (vd. Coppa e Filippi, 2024b, Coppa e Filippi, 2024a).

5.4 Il problema della Brachistocrona

La *brachistocrona* (dal greco più breve, e tempo) è una curva piana congiungente due punti, che viene percorsa nel più breve tempo rispetto a tutte le altre curve che congiungono tali punti. In maniera frettolosa si potrebbe concludere che una

⁸Su iniziativa del MIUR, a partire dall'a.s. 2017-2018, sono state avviate le Olimpiadi Nazionali di Debate, al fine di facilitare la diffusione di tale metodologia.

tale curva coincida con la curva più corta ovvero con la geodetica, che sul piano è rappresentata dal segmento congiungente i due punti. Riflettendoci sopra, se si considera un punto di partenza collocato ad una certa altezza e da questo stesso punto si fa percorrere ad un corpo tratti di lunghezza differente e pendenze differenti, il corpo acquisterà velocità maggiore nel percorso a pendenza iniziale maggiore, impiegando minor tempo per raggiungere il punto di arrivo. In realtà, la curva ottimale si dimostra essere un arco di cicloide ordinaria.

Il problema della brachistocrona rientra nella classe dei problemi di minimo e massimo, come ad esempio il problema della geodetica, cioè del cammino minimo tra due punti situati su una superficie, oppure il problema isoperimetrico, cioè la ricerca - tra tutte le curve piane chiuse e di perimetro dato - di quella che racchiude la superficie di area massima che, nonostante fin dall'antichità abbiano affascinato gli scienziati, non sono stati risolti in quanto al di fuori delle possibilità stesse della matematica classica.

Nel 1638 Galilei, nei *Discorsi e dimostrazioni*, formula il problema e, come già detto, fornisce una soluzione parziale per la indisponibilità di un formalismo matematico più avanzato, ma ingegnosissima nel coglierne le caratteristiche: l'arco di circonferenza. Nel suo studio del moto accelerato⁹, lavorando sui piani inclinati, deduce, tramite una sorta di procedimento al limite, che il percorso più breve non coinciderà con un percorso rettilineo, ma con una serie di percorsi rettilinei che formano, al limite, il suddetto arco di circonferenza. Egli, però, lavora solamente con le proporzioni e, davanti alla necessità di sconvolgere le basi della matematica, introducendo in modo non episodico ma strutturato i procedimenti di limite e differenziali, si ferma. I *Discorsi e dimostrazioni* rappresentano anche per questo il punto di inizio della fisica moderna.

Pochi decenni dopo Newton e Leibniz rivoluzioneranno la matematica moderna, grazie al calcolo differenziale ed integrale, che sarà l'ambito corretto nel quale porre sia la cinematica sia alcuni problemi di ottimizzazione. Quello della brachistocrona, è uno di quei problemi matematici di minimo che richiedono come soluzione una curva e non un punto, ed hanno perciò bisogno di un nuovo tipo di calcolo. La proprietà di minimo della curva si esprime tramite un'equazione differenziale che descrive le relazioni tra elementi infinitesimali della curva e non più finiti come nelle proporzioni (vd. Freguglia e Giaquinta, 2020, pp. 135 e seguenti).

Nel 1696, negli *Acta Eruditorum* (pp 264-269), appare la sfida ai matematici lanciata da Johann Bernoulli *Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur* per risolvere il problema della curva di discesa minima, nel caso in cui il punto materiale si muova senza attrito su una linea piana e sotto l'azione del solo peso. La risoluzione di Johann, del fratello Jakob, oltre ad una nota di Leibniz e ad una discussione del problema da parte di de l'Hôpital compaiono negli *Acta Eruditorum* del 1697, dopo appena 50 anni da quella proposta da Galilei. Nella nota Leibniz chiede che non venga pubblicata la sua risoluzione in quanto simile a quella dei due fratelli Bernoulli e aggiunge anche che: 'Huygens se fosse stato vivo, Hudde se non avesse smesso di occuparsi di queste cose e Newton se si fosse preso il disturbo, avrebbero potuto anche loro risolvere il problema'. In realtà, Newton

⁹Per maggiori approfondimenti di carattere storico sulla cinematica galileiana vd. Giusti, 1981.

aveva già risolto il problema pubblicando in forma anonima e senza dimostrazione sulle *Philosophical Transactions* (Freguglia e Giaquinta, 2020, p. 136).

5.5 La progettazione del percorso didattico

Nella seguente tabella si riporta in maniera schematica la definizione del percorso in termini di durata, finalità didattica che orientano l'intero processo educativo, obiettivi didattici specifici delle discipline, prerequisiti, moduli didattici e strumenti utilizzati.

Durata	22 ore
Finalità didattica	-Comprendere alcuni concetti matematici fondamentali tramite l'analisi del loro sviluppo storico. - Apprezzare la dimensione storica e culturale delle scoperte scientifiche nello sviluppo della cultura Europea moderna. - Approfondire lo studio della lingua latina cogliendone il valore di veicolo della cultura scientifica, attraverso l'esame di alcuni testi fondamentali, sia di epoca classica sia di epoca moderna. - Avere la capacità di confrontare linguisticamente, con particolare attenzione al lessico e alla semantica, il latino con l'italiano e con altre lingue straniere moderne. -Esporre e rielaborare i contenuti in un lessico appropriato e in un discorso coerente e coeso. - Esprimere opinioni consapevoli e valutazioni critiche. - Riconoscere l'evoluzione e la costruzione del linguaggio matematico nel testo.
Obiettivi didattici	-Comprensione degli elementi fondanti del procedimento al limite che fonda il calcolo differenziale, nel confronto critico tra i procedimenti di Galilei e dei Bernoulli. - Comprensione del contenuto matematico e della forma latina di testi scientifici selezionati. - Trasposizione in linguaggio matematico moderno del testo originale e rilettura del contenuto matematico utilizzando il linguaggio matematico contemporaneo. - Riconoscimento dei neologismi legati all'introduzione di nuovi concetti matematici. - Apprendimento dei costrutti sintattici e della semantica latina nei testi considerati (terminologia specifica). - Individuazione degli elementi di intertestualità presenti nella tradizione letteraria.
Prerequisiti matematica	Similitudine, retta e curva nel piano cartesiano, elementi di trigonometria (risoluzione di un triangolo rettangolo e di un triangolo qualunque, teorema dei seni, teorema del coseno), elementi di ottica geometrica. Utilizzo base di GeoGebra.
Prerequisiti latino	Strutture morfosintattiche della lingua latina. Caratteristiche stilistico-retoriche dei generi letterari nella loro evoluzione storica.
Moduli didattici	Modulo 1 (10 ore): Introduzione del problema e proposta di risoluzione da parte di Galilei [...] <i>non per brevissimam lineam, nempe per rectam, sed per circuli portionem</i>[...]. Modulo 2 (6 ore): La sfida di Johann Bernoulli <i>Problema novum ad cuius solutionem Mathematici invitantur di Johann Bernoulli</i> e le due proposte di risoluzione. Modulo 3 (6 ore): <i>Novissima dissertatio discipulorum</i>, dissertazione tra gli studenti riguardo la problematica della brachistocrona.
Strumenti	Libro GeoGebra per le attività di esplorazione proposte nei primi due moduli.

5.6 La metodologia

L'intero percorso viene svolto di concerto dai docenti di latino, fisica e matematica. La metodologia didattica adottata è quella dell'IBL (vd. paragrafo 3.1): gli studenti

sono invitati a lavorare in modo simile a come lavorano matematici e scienziati in modo da poter 'riscoprire' i risultati raggiunti da Galilei e dai fratelli Bernoulli. L'indagine riflessiva permette un apprendimento adattivo in cui l'esperienza è il motore per creare connessioni tra sensazioni e idee, e per porre domande orientate scientificamente. Gli studenti verranno sollecitati a fornire spiegazioni di specifici risultati loro proposti, collegarle alla loro conoscenza scientifica, in modo da poterle poi giustificare e restituire nella comunicazione tra pari.

Relativamente alle fonti originali, le fonti di osservazione sono state le seguenti:

- individuazione e analisi di termini 'nuovi', derivati dalla lingua latina, e loro trasposizione in italiano.
- analisi di processi dimostrativi del tempo e trasposizione all'attuale.
- confronto tra la lingua latina del 1600/1700 e la lingua latina classica limitatamente all'uso di alcune forme lessicali e sintattiche.
- individuazione di termini in uso nel linguaggio scientifico attuale.

5.6.1 Il libro GeoGebra di supporto al percorso didattico

Un supporto didattico fondamentale per un percorso così articolato e complesso è fornito dal software di geometria dinamica GeoGebra, molto noto ed usato in ambito didattico.

Ho utilizzato lo strumento libro GeoGebra che permette al docente di definire e organizzare le attività di studio dei testi ed esecuzione degli esperimenti matematici, in modo da poter guidare lo studente nella sua ricerca (vd. paragrafo 4.1). Tale strumento è stato implementato per lo sviluppo dei primi due moduli.

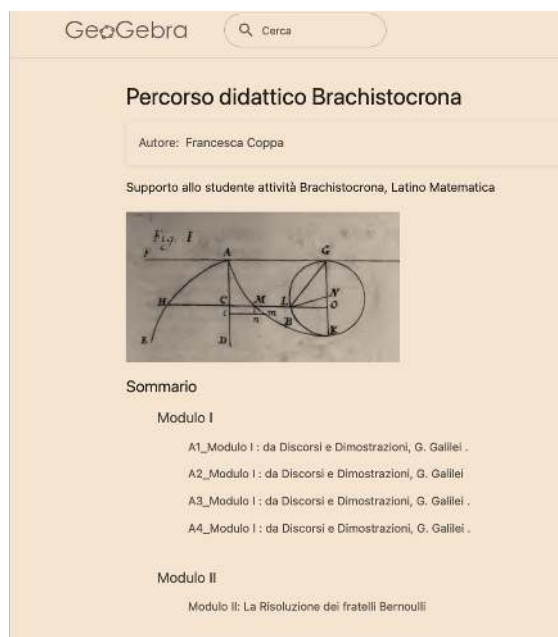


Figura 5.1. Menu iniziale del Libro GeoGebra

La figura 5.1 riporta la struttura del libro, che può essere consultato e utilizzato collegandosi al sito <https://www.geogebra.org> ed inserendo il codice del libro: *HKWK UQQS*. Una volta che ciascuno studente si sia dotato di un proprio account GeoGebra, il docente potrà seguirne individualmente l'evoluzione del lavoro.

Le attività che sono state definite nel libro libro GeoGebra relativo a questo percorso, permettono al docente di guidare gli studenti nell'esplorazione degli oggetti matematici che incontreranno durante il percorso, come mostrato nella figura. 5.2 nonché, come mostrato nella figura 5.3, l'esplorazione e l'analisi delle fonti primarie, che rappresentano il nostro *boundary object* tra le due discipline (vd. paragrafo 3.3).

Fornisci per ciascun termine l'etimologia

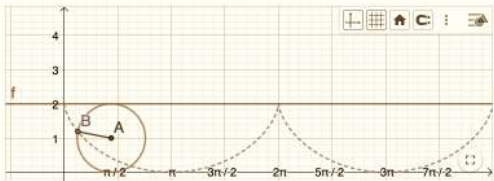
brachistocrona:

isocrona:

tautocrona:

oligocrona:

Esplora la figura e rispondi alle domande seguenti.



Cosa puoi dire riguardo all'altezza massima di ciascun ramo di cicloide?

Cosa puoi dire riguardo al segmento base sottostante a ciascun arco di cicloide?

Figura 5.2. Due quesiti estratti dal Libro GeoGebra Modulo 1

MENSIS MAJI A. MDCXCVII. 209

curva AMB quaesita. Atque adeo una opera duo insignia problema-
ta, opticum unum, mechanicum alterum, ultra quam ab aliis pete-
bam, resolvi, ostendique, quamvis ex diversissimis matheseos partibus
sint desumpta, ejusdem tamen esse naturae.

Sumamus jam specialem casum, & quidem hypothesein commu-
nem a Galileo primitus introductam & demonstratam, quod veloci-
tates gravium cadentium sint in ratione subduplicata altitudinum
emenfarum; in hoc enim proprio quaestiois tenor consistit. Quo sup-
posito, curva data AHB erit parabola, id est $ut = ax$ & $t = \sqrt{ax}$, quae
si substituantur in aequatione generali, habebitur haec $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$
ex qua concludo: curvam Brachystochronam esse Cycloidem vulgarem.

Cosa ci vuole comunicare Johann, secondo te, nella prima frase di questo brano?

Secondo te, come mai Johann introduce l'analogia ottico-meccanica per la risoluzione del problema? E dove interviene tale analogia nella dimostrazione?

Ritieni che la dimostrazione si possa condurre anche senza ricorrere all'analogia ottico-meccanica?

In che modo Johann usa i differenziali per arrivare alla soluzione?

Figura 5.3. Un quesito estratto dal Libro GeoGebra Modulo 2

5.7 Modulo 1. Introduzione del problema e proposta di risoluzione da parte di Galilei

Il modulo si apre avviando una dibattito con gli studenti relativo a come formulare un problema la cui soluzione sia, in generale, una curva e, in particolare, una curva che minimizzi il tempo, valutando le strategie da adottare, siano esse geometriche o analitiche.

Si procede poi a presentare la cicloide, la curva che risolve il problema, che gli studenti non hanno mai incontrato nel loro percorso di studi. La sua preliminare introduzione si rende necessaria in funzione del successivo lavoro sulla risoluzione fornita dai fratelli Bernoulli. È molto utile, in questa fase iniziale, fornire alla classe, secondo un approccio per illuminatura (vd. par. 3.2.1), una nota storica riguardo lo studio della cicloide, per la prima volta affrontato da Nicola Cusano e nel 1599 denominata in tal modo da Galilei. Molti scienziati, a cavallo tra la fine del '500 e gli inizi del '700, tra cui Torricelli, Pascal, Fermat, Cartesio, Huygens, i fratelli Bernoulli e Newton si dedicarono allo studio di tale curva¹⁰.

Si affronta quindi lo studio di tutta una serie di teoremi presenti nei *Discorsi e dimostrazioni*, necessari per la comprensione del teorema XXII, quello sul quale Galilei baserà la sua risoluzione del problema.

Le attività nelle quali si articola il modulo sono le seguenti ¹¹:

Attività 1 (2h): La curva che risolve il problema.

Attività 2 (2h): Presentazione dell'idea risolutiva di Galilei

Attività 3 (4h): Analisi del teorema IV del *De moto aequabile*, giornata terza e teoremi I-III, V e VI del *De motu naturaliter accelerato*, giornata terza.

Attività 4 (2h): Analisi del Teorema XXII e Scholium *De motu naturaliter accelerato*, giornata terza.

5.7.1 Attività 1. La curva che risolve il problema

Probabilmente la cicloide ordinaria (d'ora in poi cicloide) è stata ideata dallo stesso Galilei da giovane come la curva adatta a descrivere un ponte con una sola arcata (Lombardo Radice e Segre, 1967). È la curva tracciata da un punto fissato rigidamente su una circonferenza, detto generatore, che rotola, senza strisciare, lungo una retta.

Viene presentata agli studenti come curva luogo e, anche con l'ausilio di GeoGebra, ne vengono osservate e verificate le proprietà principali. È l'occasione per condurre un approfondimento sulle forme di rappresentazione parametriche e polari delle curve, accanto a quelle cartesiane implicite, più note agli studenti. Si guida la classe a ricavare l'equazione parametrica della cicloide nel modo di seguito proposto.

In riferimento alla figura 5.4, sia r il raggio della circonferenza generatrice. Sia O l'origine degli assi e sia P il punto generico della cicloide, ottenuta facendo rotolare la circonferenza generatrice lungo l'asse delle ascisse e considerando come punto

¹⁰vd. Katz, 2004 e Maraschini e Palma, 2013 per maggiori approfondimenti.

¹¹Nella conduzione dell'attività di traduzione del testo si è fatto riferimento Galilei, 1958.

generatore quello collocato inizialmente sull'origine degli assi. Sia B la proiezione di P sull'asse delle ascisse, ovviamente i due punti hanno la stessa ascissa. Possiamo esprimere ora il segmento OB come $OD - BD$.

Osservando che, per la definizione di cicloide, $OD = \widehat{PD}$ ed essendo $\widehat{PD} = r \cdot \theta$ (dove θ è misurato in radianti), si ha: $P_x = OD - BD = r \cdot \theta - r \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ e $P_y = PA + AB = r \cdot \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) + r$. Quindi possiamo esprimere le coordinate generiche del punto P nel seguente modo:

$$\begin{cases} x = r \cdot \theta - r \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ y = r \cdot \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) + r \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = r \cdot (\theta - \sin\theta) \\ y = r \cdot (1 - \cos\theta) \end{cases}$$

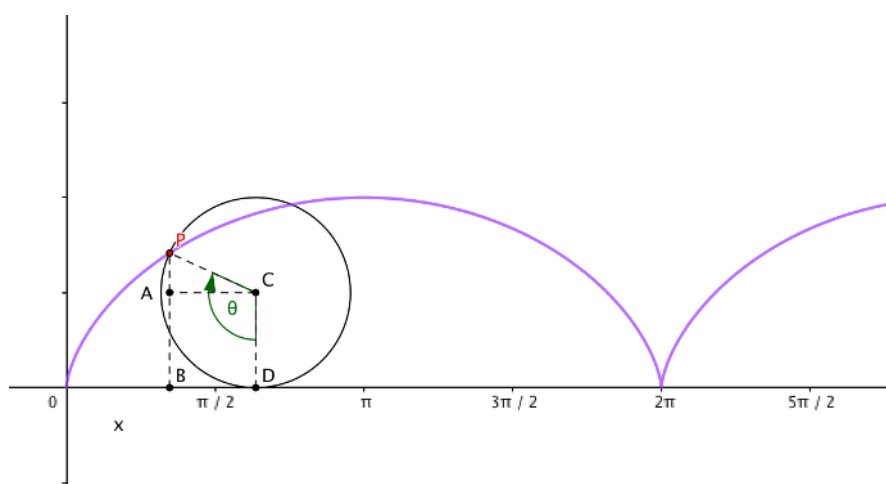


Figura 5.4. cicloide

Nel libro GeoGebra, vengono proposte poi alcune attività relative all'esplorazione della cicloide e delle sue proprietà.

1. l'altezza massima dell'arco è pari al diametro della circonferenza generatrice
2. la lunghezza di un arco di cicloide è pari ad 8 volte il raggio della circonferenza
3. la base sottostante a ciascun arco è pari alla lunghezza della circonferenza stessa
4. l'area compresa fra un arco di cicloide e la base è tre volte l'area del cerchio.

Sempre secondo un approccio per illuminatura, si possono fornire alcune note storiche interessanti riguardanti la dimostrazione di tali proprietà. Ad esempio, la seconda proprietà della cicloide è stata dimostrata in risposta a una sfida lanciata da Blaise Pascal nel 1658. Sebbene matematici come Michelangelo Ricci, Christiaan Huygens, Christopher Wren e Pierre de Fermat abbiano presentato le loro soluzioni senza partecipare formalmente alla gara, Pascal pubblicò le sue risposte poco dopo (Katz, 2004). La quarta proprietà della cicloide, che riguarda il calcolo dell'area, era stata verificata sperimentalmente da Galilei mediante la pesatura di lamine

aventi la forma delle due superfici e successivamente risolta in modo rigoroso da Roberval e da Torricelli (Lombardo Radice e Segre, 1967 e Stillwell, 2020). Come eventuale approfondimento, a partire dallo spunto storico, può essere interessante far calcolare agli studenti la lunghezza dell'arco di cicloide, facendolo ricavare come integrale di linea, a partire dalla forma parametrica, fornendo così, un utile esempio di applicazione del calcolo integrale. Siano:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = r \cdot (1 - \cos\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = r \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (5.1)$$

Allora, si ha che la lunghezza dell'arco di cicloide è dato dal seguente integrale:

$$L = \int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{dx^2 + dy^2} = \quad (5.2)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cdot (1 - \cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta} d\theta = \quad (5.3)$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos\theta} d\theta =$$

$$= 2 r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} d\theta = 2 r \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{2} d\theta = 4 r \int_0^{\pi} \sin t dt = 8r.$$

Analogamente possiamo invitare gli studenti a calcolare l'area sottesa da un arco di cicloide:

$$A = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} r \cdot (1 - \cos\theta) \cdot (1 - \cos\theta) d\theta = \quad (5.4)$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cdot \cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \quad (5.5)$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cdot \cos\theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right) d\theta =$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cdot \cos\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = 3 \pi r^2.$$

Infine, come ulteriore illuminatura, vale la pena sottolineare che la cicloide risolve due problemi storici quello della *tautocrona* ovvero la curva piana sulla quale un grave lasciato cadere lungo una sua concavità, impiega lo stesso tempo nel raggiungere il suo punto di minima altezza, qualunque sia il punto sulla curva dal quale lo si lasci cadere (a cui risoluzione si deve a Christiaan Huygens), e quello della *brachistocrona*, la cui risoluzione, come si vedrà a breve, si deve a Johann Bernoulli (Bernoulli, 1697b) e che dà storicamente inizio al calcolo delle variazioni.

5.7.2 Attività 2. Introduzione ai Discorsi e dimostrazioni di Galilei

Nella conduzione di tutte le attività relative a questo modulo e nella realizzazione del libro GeoGebra, ho utilizzato il testo del 1638 stampato presso gli Elzevirii¹². Questa

¹²G. Galilei Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, presso gli Elzevirii, Leida 1638, consultabile su <https://archive.org> e su <https://bibdig.museogalileo.it>

edizione è reperibile sul sito archive.org, quindi di facile consultazione e risulta anche di grande impatto per gli studenti, in quanto si presenta come manoscritto.

Mi soffermo ora sull'attività 2 nella quale presento in chiave storica l'idea risolutiva del problema proposta da Galilei.

Prima di affrontare la dimostrazione, conviene introdurre brevemente il testo di riferimento. Opera adulta di Galilei nella quale egli presenta il lavoro scientifico di tutta una vita, in particolare, è presente l'opera *De motu*, mai pubblicata prima¹³.

Strutturato sotto forma di dialogo, tra i tre personaggi che discutono anche nel Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo e che, in questo caso, commentano un testo latino scritto da un accademico che ha insegnato a Padova e che viene spesso indicato come l'autore, l'accademico o il nostro amico.

Come già accennato, si ritiene tale opera come la prima della scienza moderna. Newton nei suoi scritti riconosce a Galilei la paternità del principio d'inerzia ed il contributo alla seconda legge della dinamica¹⁴.

Nonostante fosse stato proibito a Galilei, dopo la condanna e l'abiura, di occuparsi di questioni cosmologiche, e fosse stata vietata dall'Inquisizione la pubblicazione di qualsiasi suo scritto, la sua incessante curiosità, non lo fece desistere dalla ricerca, cui diede un nuovo oggetto: la fisica terrestre anziché la fisica celeste. Decise pertanto di far stampare il libro in Leida in Olanda, in cui i veti dell'Inquisizione non furono rispettati. Il testo cerca di sistematizzare le teorie di Galilei affrontando campi diversi della fisica che vanno dalle proprietà della materia, connesse alla sua resistenza a rompersi, ai fenomeni del moto, argomentazioni arricchite da molte digressioni sui più svariati effetti naturali. Il libro non parve destare particolari reazioni di sdegno o apprensione, segno forse di un certo ammorbidimento della pena o più probabilmente del fatto che non si occupasse di temi rilevanti per la fede (Galilei, 1990).

Da un punto di vista linguistico, sebbene gran parte del testo sia scritto in volgare italiano e solo alcune sezioni in latino, esso risulta chiaro e lineare, adatto per comunicare le sue scoperte scientifiche anche ad un pubblico non prettamente accademico. Pur rispettando le convenzioni linguistiche e grammaticali del latino classico, per quanto riguarda il vocabolario, Galilei ha adottato quello già esistente per descrivere concetti scientifici emergenti introducendo talvolta nuovi termini, scelta che rifletteva la sua audacia in campo scientifico e la sua volontà di esplorare nuovi orizzonti. L'uso del latino era anche una scelta socio-culturale, volta a raggiungere un pubblico più ampio e sottolineare l'importanza delle sue scoperte nel contesto culturale dell'epoca. Poste tali considerazioni, è interessante riflettere (in aula) su alcuni termini e ricercarne il significato traslato in ambito matematico da un'accezione più letterale.

Relativamente alla matematica, l'apparato che Galilei impiega nella cinematica, appare molto differente da quello al quale sono abituati gli studenti. Egli usa solo proporzioni ed un impianto euclideo (anche nell'uso dei grafici). A volte, le dimostrazioni risultano difficili da interpretare a causa del formalismo adottato per indicare gli intervalli di tempo, denotati tramite segmenti. Questo potrebbe rappresentare una difficoltà nella lettura della fonte che si può tuttavia superare riscrivendo le dimostrazioni in un linguaggio a noi più vicino, ad esempio indicando

¹³vd. Galilei, 1890–1907 per approfondimenti sull'opera di Galilei

¹⁴vd. anche De Angelis, 2021, pp. XX-XXII.

con la lettera t gli intervalli di tempo. Ho scelto questa prassi didattica nella definizione del mio percorso didattico.

La centralità che riveste nelle dimostrazioni galileiane la composizione dei rapporti, come riportate nei *Discorsi e dimostrazioni*, rende necessaria l'assunzione di un postulato di esistenza del quarto proporzionale, che rappresenta un elemento di differenziazione rispetto alla trattazione della teoria delle proporzioni presente negli *Elementi*. Galilei, infatti, tutte le volte che rappresenta tempi, velocità e spazi attraverso i segmenti, pur non utilizzando necessariamente la proporzione composta, implicitamente sottintende l'assioma dell'esistenza della quarta proporzionale (Giusti, 1993). Tale assioma soggiace essenzialmente «alla possibilità di rappresentare i tempi, le velocità, e in genere le grandezze fisiche, mediante segmenti; un'operazione che Galileo compie sistematicamente e senza la quale la maggior parte dei suoi teoremi sarebbero indimostrabili, a partire dal teorema I della terza giornata [...]». Questa rappresentazione è essenziale affinché la dimostrazione possa procedere: si tolga la corrispondenza tra tempi, velocità e segmenti della figura e tutta la costruzione galileiana crollerà senza rimedio. »(Giusti, 1993, p. 54), come avremo modo di vedere nel par. 5.7.5). Mi piace, a tal proposito, riportare le parole di Enrico Giusti:

Si tratta di «[...] una necessità derivante dall'uso delle idee della teoria degli indivisibili nella cinematica: la riduzione delle grandezze in gioco a dei segmenti è condizione necessaria per il dispiegarsi della dimostrazione galileiana. Ora una tale riduzione è possibile solo mediante l'assioma del quarto proporzionale che fa sì che possiamo rappresentare qualsiasi grandezza con segmenti in modo da conservare i rapporti reciproci, e dunque che garantisce in ultima analisi che la natura è geometrizzabile. Ecco dunque un punto di tensione tra le necessità della fisica che Galileo vuole sviluppare, e le possibilità della matematica che Euclide è in grado di fornire. Il destino della teoria euclidea delle proporzioni non si gioca solo sulla semplicità delle definizioni e sull'eleganza delle dimostrazioni, ma soprattutto sull'efficacia nel rispondere alle esigenze della nuova fisica. Ed è su queste esigenze (e in particolare, lo ripetiamo, sull'uso della proporzione composta e sulla rappresentazione geometrica delle grandezze fisiche) che la teoria euclidea mostra la propria debolezza. Più tardi, l'assunzione di opportune unità di misura farà sì che tutte le grandezze si riducano a numeri, un'operazione che senza dubbio faciliterà la trattazione matematica, anche se a scapito del rigore geometrico. Per Galileo, che della rivoluzione di Viète e di Descartes non è partecipe, e che anzi si muove in un universo matematico separato, l'assioma del quarto proporzionale gioca un ruolo analogo, permettendo la riduzione di tutte le grandezze a segmenti»(Giusti, 1993, p.55).

L'utilizzo dei segmenti è legato strettamente all'uso di quella che sarà la teoria degli indivisibili nella cinematica ed una tale costruzione è possibile solo presupponendo l'assioma di esistenza della quarta proporzionale. Interessante da un punto di vista didattico potrebbe essere dunque la definizione di un percorso, che preceda l'attuale, sulla teoria delle proporzioni in Euclide e la sua riformulazione in Galilei.

5.7.3 Attività 2. Presentazione dell'idea risolutiva di Galilei

Siamo ora pronti per accompagnare gli studenti nella scoperta di come Galilei affronta il problema della brachistocrona. Ho scelto di presentare subito lo *scholium*¹⁵ del *teorema XXII*, riportato in figura 5.5 e che sarà poi ampiamente discusso e analizzato nel paragrafo 5.7.7.

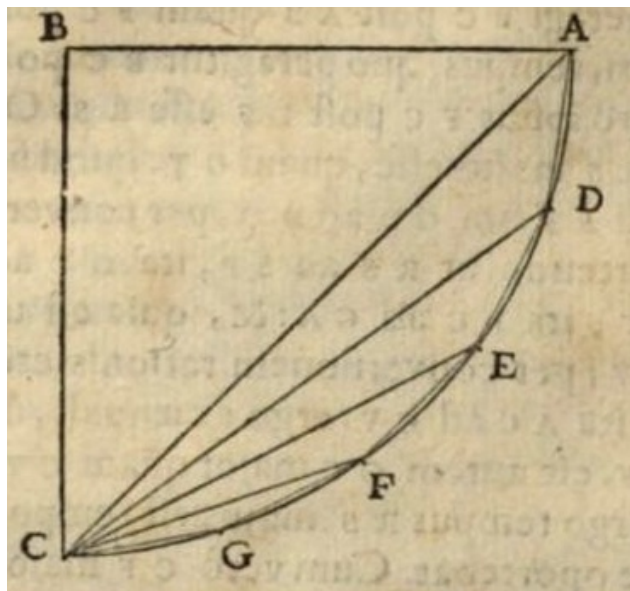


Figura 5.5. Immagine dello scholium del teorema XXII. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

In tal modo è possibile far scoprire subito alla classe, quale soluzione Galilei fornisce al problema ed in quale maniera ci arriva.

Egli afferma che il movimento più breve per andare da A a C (vd. 5.5) non avviene lungo la linea più corta, cioè la retta, ma *colligi posse videtur*¹⁶, lungo un arco di circonferenza. Per arrivare a tale conclusione usa un procedimento al limite dove approssima il movimento lungo la circonferenza con il movimento lungo poligoni.

A questo punto, il docente innesca una riflessione critica con gli studenti relativamente al fatto che Galilei, con la sola matematica classica non può dimostrare che la soluzione da lui proposta sia la migliore, e infatti non lo è: egli non riesce a fornire come soluzione la cicloide in quanto non ha gli strumenti matematici adatti, cioè il calcolo infinitesimale che permette di esprimere una curva non come luogo ma tramite le proprietà locali di curvatura. Gli strumenti con i quali cerca di risolvere il problema sono quelli della geometria euclidea, anche se in realtà egli si spinge un po' oltre introducendo anche un procedimento di limite benché non formalizzato. Questo scenario rende tangibile la necessità dell'invenzione di nuovi strumenti matematici, che gli studenti si trovano a studiare nel quinto anno di liceo e dei quali, a volte, non ne ravvedono la potenza e l'importanza, favorendo così un riorientamento delle loro convinzioni (vd. par. 3.2.2).

¹⁵Galilei 1638, *op. cit.*, p. 229.

¹⁶Ovvero, pare si possa concludere.

La chiave per afferrare il ragionamento dello *scholium* sta nel teorema XXII, la cui comprensione richiede l'analisi del *modus operandi* di Galilei e di alcuni risultati pregressi. Siamo pronti dunque per guidare gli studenti in questa esplorazione.

5.7.4 Attività 2. Alcune riflessioni sul latino di Galilei

Conviene dedicare un po' di tempo alla lettura del paragrafo introduttivo del *De motu naturaliter accelerato*¹⁷, ovvero il paragrafo della giornata terza in cui introduce il modo naturalmente accelerato, con lo scopo di familiarizzare con il latino di Galilei e riconoscere gli elementi precipui del nuovo linguaggio scientifico (che ho evidenziato nel testo), soffermandosi su alcuni passi fondamentali, in cui pone le fondamenta della cinematica del moto accelerato. Interessante è leggersi che:

*[.] tamen, quandoquidem quadam accelerationis specie gravium descendentium utitur natura, eorundem speculari passiones decrevimus, si eam, quam allaturi sumus de nostro motu accelerato definitionem, cum essentia motus naturaliter accelerati congruere contigerit*¹⁸.

Sostiene, dunque, che 'la natura si serve di una certa forma di accelerazione nei gravi discendenti' di cui egli intende studiarne le proprietà. Vuole fornire perciò una definizione del moto naturalmente accelerato, che corrisponda a quello di cui si serve la natura che 'suole far uso dei mezzi più immediati'.

E lo fa introducendo un linguaggio specialistico della fisica moderna che si lega ad un sostrato grammaticale classico. Qualche riga più avanti si legge, infatti, che:

*[.]sicut enim motus aequabilitas et uniformitas per temporum spatiorumque aequabilitates definitur ac concipitur (lationem, enim, tunc aequabilem appellamus, cum temporibus aequalibus aequalia conficiuntur spatia) ita per easdem aequalites partium temporis, incrementa celeritatis simpliciter facta percipere possumus; mente concipientes, motum illum uniformiter eodemque modo continue acceleratum esse, dum temporibus quibuscumque aequalibus aequalia ei superaddantur celeritatis additimenta*¹⁹.

e leggendo ancora:

[...] et consequentes eius passiones contemplari, non sit inconveniens (ita, enim, qui helicas aut conchoides lineas ex motibus quibusdam exortas, licet talibus non

¹⁷Galilei 1638 op. cit., pp. 156-158.

¹⁸Ossia, 'Tuttavia dal momento che la natura si serve di una certa forma di accelerazione nei gravi discendenti, abbiamo stabilito di studiarne le proprietà posto che la definizione che daremo del nostro moto accelerato abbia a corrispondere con l'essenza del moto naturalmente accelerato'.

¹⁹Ossia, 'infatti, come l'uniformità e l'uguaglianza del moto sono definite e concepite attraverso l'uguaglianza dei tempi e degli spazi (chiamiamo infatti uniforme quel movimento (*lationem*) in cui in tempi uguali vengono percorsi spazi uguali), così, attraverso le stesse uguaglianze di intervalli di tempo (*partium temporis*) possiamo percepire gli incrementi di velocità avvenuti semplicemente; concependo con la mente che quel moto è uniformemente e continuamente accelerato allo stesso modo, mentre in qualsiasi intervallo di tempo uguale, vengono aggiunti ad esso incrementi uguali di velocità.

utatur natura, sibi finxerunt, earum symptomata ex suppositione demonstrarunt cum laude)²⁰ [...].

Una volta individuati, i termini scientifici vengono analizzati più in dettaglio. Nel primo paragrafo riportato, emerge l'espressione *naturaliter accelerato*, che indica l'osservazione della natura mentre nel secondo paragrafo troviamo *uniformiter accelerato* (attestato in Arnobio), legato alle uguali porzioni di velocità in porzioni uguali di tempo e che, come si legge nel brano, spiega rifacendosi alla suddivisione dei tempi nel moto uniforme. *Aequabilis* diventa uniforme; così *passio-onis*, che significa 'sofferenza, patimento', indica la proprietà conseguente al moto stesso, e ugualmente si assimila al significato di 'proprietà, caratteristica'. Il termine va inteso in un senso tecnico-filosofico, tipico del linguaggio dell'epoca, per indicare gli stati o i cambiamenti risultanti da una causa specifica.

Nel terzo paragrafo, compare il termine *symptoma-atis* propriamente 'sintomo', con il significato di caratteristica di una curva. Il termine è già ricorrente nel libro I, proposizioni 11-13, de *Le coniche*, testo di Apollonio di Perga, di cui la prima edizione, in greco e latino, fu pubblicata a Bologna da Federico Commandino nel 1566.

Il termine *incrementa* si traduce 'incrementi' o 'aumenti' e si riferisce all'aumento della velocità o di un'altra grandezza. È un termine generale che indica il processo di accrescimento o aumento.

Il termine *additimentum* deriva dal verbo *addere* (aggiungere), e si traduce come aggiunte o incrementi aggiunti. In questo caso, *additimenta* implica l'aggiunta di un aumento o incremento alla velocità in un determinato intervallo di tempo.

5.7.5 Attività 3. Analisi del teorema IV del *De moto aequabile*, giornata terza e dei teoremi I-III, V, VI e XIX del *De motu naturaliter accelerato*, giornata terza.

Si prosegue il percorso, con l'attività 3, affrontando direttamente dal testo di Galilei, lo studio di alcuni teoremi, necessari per la comprensione del sopra citato teorema XXII, interpretandoli e trasponendoli in un linguaggio più familiare. Gli studenti hanno l'opportunità di entrare in contatto con tecniche dimostrative per loro nuove in un contesto cinematico: come già detto, Galilei opera solo con proporzioni, quindi rapporti tra quantità omogenee, il passaggio dai rapporti ai numeri è successivo. È l'occasione per loro di cimentarsi nella produzione di dimostrazioni di tali teoremi, a partire dalle competenze scolastiche e di incontrare così i nodi concettuali alla base dello studio del moto e della sua rappresentazione matematica. Tali condizioni favoriscono il così detto *shock culturale* (vd. par. 3.2.2) attraverso il quale gli studenti potranno riorientare le proprie conoscenze.

²⁰Ossia, 'e non è inconveniente contemplare gli effetti - *passiones* - (infatti, così, come coloro che hanno immaginato - *finxerunt* - le linee elicoidali o conoidali originate da certi movimenti, sebbene la natura non si serva di tali linee, ne hanno dimostrato i sintomi/ le caratteristiche [a partire] dalla supposizione, ottenendo apprezzamenti - *cum laude*).'

In particolare, possono osservare come, non potendo usare nelle proporzioni rapporti tra grandezze non omogenee ²¹, Galilei descrive la velocità nell'assioma IV del *De motu aequabili*:

*Velocitas qua tempore eodem conficitur maius spatium, maior est velocitate qua conficitur spatium minus*²².

cioè, come «come una caratteristica primitiva del moto: essa sarà la quantità del movimento secondo il più ed il meno veloce, una grandezza cioè che esprime in termini quantitativi la maggiore o minore sveltezza del mobile »(Giusti, 1981).

Galilei esprime nel modo seguente la relazione tra spazio, tempo e velocità nel moto rettilineo uniforme: le velocità di due moti uniformi hanno un rapporto composto di quello tra gli spazi e l'inverso dei tempi, ovvero, come scriveremmo oggi:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} \quad 23$$

e che si può ricavare dal teorema di seguito riportato.

Teorema. *Teorema IV, De motu aequabili giornata terza*

Si duo mobilia ferantur motu aequabili, inaequali tamen velocitate, spatia temporibus inaequalibus ab ipsis peracta habebunt rationem compositam ex ratione velocitatum et ex ratione temporum. (Se due mobili si muovono con moto aequabile, ma con velocità disuguali, le distanze da essi percorse in tempi disuguali avranno un rapporto composto dal rapporto delle velocità e dal rapporto dei tempi).

Si procede con la presentazione dei teoremi²⁴ I-IV, VI e XIX del *De motu naturaliter accelerato*, giornata terza, analizzandoli, a seconda della difficoltà, nella loro globalità o meno.

Teorema. *Teorema I.* ²⁵. *Tempus in quo aliquod spatium a mobili conficitur latone ex quiete uniformiter accelerata, est aequale temporibus in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu aequabili delato, cuius velocitatis gradus subduplus sit ad summum et ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati. (Il tempo in cui uno spazio dato è percorso da un mobile con moto uniformemente accelerato a partire dalla quiete, è eguale*

²¹Per un approfondimento sulla teoria delle proporzioni di Galileo in relazione a quella di Euclide vd. supra Giusti, 1993 pp. 43 -82.

²²Ovvero, la velocità con cui si percorre una distanza maggiore nello stesso tempo è maggiore della velocità con cui si percorre una distanza minore.

²³vd. Galilei, 1990, p. XXIX.

²⁴Galilei, 1638 *op. cit.*, pp. 169 e seguenti.

²⁵Il risultato di tale teorema, detto anche Teorema Mertoniano, viene anche attribuito ai calcolatori di Oxford (XIV sec.) della scuola di Merton. A tal riguardo vedasi. C. Truesdell, *Essays in The History of Mechanics*, (New York, 1968), p. 30: «Le fonti pubblicate ora ci dimostrano incontestabilmente come le principali proprietà cinematiche del moto uniformemente accelerato - ancora attribuite a Galileo dai testi di fisica - siano state in realtà scoperte e dimostrate dagli allievi della Scuola di Merton... Le caratteristiche della fisica greca vennero sostituite fondamentalmente - almeno per quanto riguarda il moto - dalle quantità numeriche che hanno da allora dominato la scienza occidentale. Il loro contributo scientifico si diffuse rapidamente in Francia, Italia e in altre parti d'Europa. Quasi contemporaneamente, Giovanni da Casale e Nicole Oresme scoprirono come rappresentare i risultati delle loro ricerche con l'ausilio di grafici geometrici, introducendo così il collegamento tra la geometria e il mondo fisico, che divenne la seconda peculiarità del pensiero occidentale».

al tempo in cui quel medesimo spazio sarebbe percorso dal medesimo mobile mosso di moto aequabile, il cui grado di velocità sia subduplo (la metà) del grado di velocità ultimo e massimo [raggiunto da mobile] nel precedente moto uniformemente accelerato).

Il teorema I rappresenta un bell'esempio, e di facile comprensione, di come Galilei operi, soprattutto per la rappresentazione di tempi, spazi e velocità (come precedentemente anticipato) e per l'utilizzo intuitivo di concetti infinitesimali. Nei suoi grafici egli tiene conto della variazione del tempo, dello spazio (rappresentato dal segmento CD nella fig. 5.6) e della velocità. Vale la pena di esaminare integralmente in lingua originale, la sua dimostrazione, evidenziandone gli elementi di modernità.

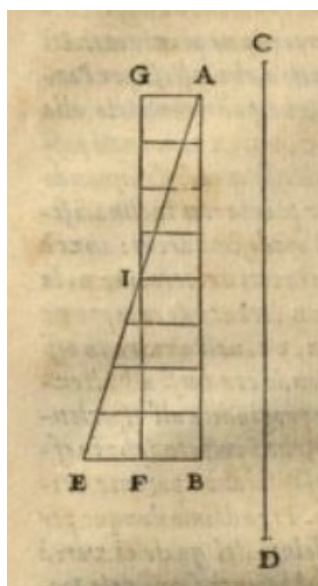


Figura 5.6. Grafico del teorema I. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Galilei vuole dimostrare che il tempo di percorrenza di un dato spazio CD da parte di un mobile che si muove di moto uniformemente accelerato a partire dalla quiete è uguale al tempo in cui lo stesso spazio sarebbe percorso a una velocità uniforme il cui valore è metà della velocità finale del mobile. Lavora con proporzioni di quantità omogenee tra loro e cerca di mettere in correlazione queste informazioni. Riferendoci al grafico di cui alla fig. 5.6, EB rappresenta l'ultimo e massimo grado della velocità accresciuta. I segmenti sulle parallele condotte a BE dai punti appartenenti ad AB rappresentano i gradi delle velocità crescenti a partire da A . Da F , punto medio di BE , conduce la parallela FG ad AB . Conduce poi da A la parallela a FB , costruisce il parallelogramma $AGFB$ che è equivalente al triangolo AEB ²⁶. Prolunga poi le parallele condotte dai punti di AB a EB , fino ad incontrare il lato AE del triangolo AEB e conclude che l'insieme di tutte le parallele contenute nel quadrilatero è equivalente all'insieme di quelle contenute nel triangolo AEB . Questo passaggio è da sottolineare in quanto, in realtà, egli sta di fatto calcolando un integrale definito.

Siccome ad ogni istante di tempo contenuto in AB corrisponde un punto di AB e poiché le parallele condotte da questi punti e comprese nel triangolo ABE

²⁶Si noti che (per il teorema di Talete) I è il punto medio di AE .

rappresentano i gradi crescenti della velocità aumentata, mentre le parallele contenute nel parallelogramma rappresentano analogamente altrettanti gradi della velocità non accresciuta, ma aequabile, Galilei ne deduce che, nel moto accelerato, secondo le parallele crescenti del triangolo AEB si avranno altrettanti momenti di velocità che nel moto aequabile secondo le parallele del parallelogramma. Infatti quei momenti²⁷ di velocità che mancano nella prima parte del moto accelerato (triangolo AGI) sono compensati dai momenti rappresentati dalle parallele del triangolo IEF . Dunque, conclude che saranno uguali gli spazi percorsi nello stesso tempo da due mobili, uno dei quali si muova di moto uniformemente accelerato a partire dalla quiete mentre l'altro di moto aequabile, secondo un momento di velocità subduplo (pari alla metà) del momento massimo di velocità del moto accelerato.

Galilei dunque somma le velocità istantanee (*momentum velocitatis*) e non gli spazi infinitesimi percorsi da mobile nei singoli istanti: i momenti di velocità diventeranno dunque 'gradi di velocità', componenti elementari dai quali ricavare la relazione tra spazio e tempo. Si percepisce il metodo degli indivisibili che sarà poi messo a punto dal suo allievo Bonaventura Cavalieri, ma per Galilei le aree dei triangoli sono ottenute sommando velocità e dunque sono ancora velocità che deve combinare opportunamente col tempo per ottenere il risultato cercato. Vale pena di evidenziare come, nel caso degli algebristi (a partire da Cartesio) che moltiplicano tempo con velocità, le aree dei triangoli rappresentano lo spazio percorso²⁸ (Giusti, 1993).

E' utile a questo punto discutere alcune relazioni proprie del *moto aequabile*, che Galilei spiega nel paragrafo del *Motu aequabili* e che ci saranno utili in seguito.

La definizione di moto aequabile che Galilei fornisce è la seguente:

Aequalem, seu uniformem, motum intelligo eum, cuius partes quibuscumque temporibus aequalibus a mobili peractae, sunt inter se aequales.

(Intendo dire moto eguale, o uniforme, le cui parti, compiute dal mobile in qualunque tempo eguale, sono uguali tra loro).

Oggi tale risultato lo esprimiamo tramite una legge funzionale e non tramite un rapporto, nel seguente modo:

$$s(t) = v \cdot t \quad (5.6)$$

con v , velocità, costante. Utilizzando invece la notazione di Galilei una tale relazione verrebbe espressa tramite il seguente rapporto:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{t_2}{t_1}. \quad (5.7)$$

che esprime il fatto che «le velocità di due moti uniformi avranno un rapporto composto di quello tra gli spazi e di quello inverso dei tempi» Galilei, 1990. L'enunciato del teorema I del *Motu aequabili* è il seguente:

Teorema (Teorema I, De motu aequabili). *Si mobile aequabiliter latum eadem cum velocitate duo pertranseat spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta. (Se un mobile*

²⁷vd. Galilei, 1890–1907 e Giusti, 1981 per un approfondimento sul concetto di momento in Galilei.

²⁸Per un analisi più approfondita vd. anche Giusti, 1981.

mosso con la stessa velocità percorre due spazi, i tempi dei moti saranno tra loro come gli spazi completati.)

Oggi lo esprimiamo nel seguente modo:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad (5.8)$$

L'enunciato del teorema II del *Motu aequabili* è il seguente:

Teorema (teorema II, De motu aequabili). *Si mobile temporibus aequalibus duo pertranseat spatia, erunt ipsa spatia inter se ut velocitates. Et si spatia sint ut velocitates, tempora erunt aequalia. (Se un mobile percorre due spazi in tempi uguali, tali spazi saranno tra loro come le velocità. E se gli spazi saranno tra loro come le velocità, i tempi saranno uguali.)*

Ritorniamo adesso al *De motu naturaliter accelerato* e analizziamo l'enunciato del seguente teorema, nel quale gli studenti riconosceranno la legge di caduta verticale.

Teorema. *Teorema II (caduta verticale)*

Si aliquod mobile motu uniformiter accelerato descendat ex quiete, spatia quibuscunque temporibus ab ipso peracta, sunt inter se in duplicata ratione eorundem temporum, nempe ut eorundem temporum quadrata. (Se un mobile scende, a partire dalla quiete, con moto uniformemente accelerato, gli spazi percorsi da esso in tempi qualsiasi stanno tra di loro in duplicata proporzione dei tempi [in un rapporto pari al rapporto dei tempi moltiplicato per se stesso], cioè stanno tra di loro come i quadrati dei tempi.)

Questa legge oggi noi la esprimiamo in modo funzionale mentre Galilei ce la propone in forma di proporzione. Dovendo operare una scelta, ho deciso di non analizzarne la dimostrazione, che si basa essenzialmente sul teorema mertoniano, in quanto non particolarmente significata da un punto di vista didattico.

Soffermiamoci ora sui seguenti due corollari del teorema II: per gli studenti è l'occasione di apprezzare risultati che conoscono già ma che Galilei presenta con un linguaggio per loro completamente nuovo.

Il primo, di cui di seguito si riporta il corollario, esprime la legge dei numeri dispari, ovvero la legge secondo la quale i corpi in caduta libera accelerano costantemente, e le distanze percorse dall'origine (intese come posizioni assolute), stanno tra loro come i quadrati dei tempi. Ciò equivale ad affermare che in tempi uguali a partire dalla quiete, gli incrementi degli spazi percorsi da un grave in caduta libera crescono secondo la progressione dei numeri dispari, ovvero che gli incrementi degli spazi sono proporzionali ai numeri dispari, così come gli incrementi dei quadrati sono proporzionali ai numeri dispari (vd. fig. 5.8).

Corollario (Corollarium I. Legge dei numeri dispari). *Hinc manifestum est, quod si fuerint quotcunque tempora aequalia consequenter sumpta a primo instanti seu principio lationis, utputa AD, DE, EF, FG, quibus conficiantur spatia HL, LM, MN, NI; ipsa spatia erunt inter se ut numeri impares ab unitate, scilicet ut 1, 3, 5, 7: haec enim est ratio excessuum quadratorum linearum sese aequaliter excedentium et quarum excessus est aequalis minimae ipsarum, seu dicamus quadratorum sese ab unitate consequentium. Dum igitur gradus velocitatis augentur iuxta seriem simplicem numerorum in temporibus aequalibus, spatia peracta iisdem temporibus incrementa suscipiunt iuxta seriem numerorum imparium ab unitate. (Di qui è manifesto che, se dal primo istante o inizio del moto avremo preso*

successivamente un numero qualsiasi di tempi eguali, come ad esempio AD, DE, EF, FG, nei quali siano percorsi gli spazi HL, LM, MN, NI, questi spazi staranno tra di loro come i numeri impari ab unitate [dispari a partire dall'unità], cioè come 1, 3, 5, 7: questa è infatti la proporzione tra gli eccessi dei quadrati delle linee che si eccedono egualmente e il cui eccesso è eguale alla minima di esse, o vogliam dire tra i numeri quadrati consecutivi ab unitate. Pertanto, mentre i gradi di velocità aumentano in tempi eguali secondo la serie dei numeri semplici, gli spazi percorsi nei medesimi tempi acquistano incrementi secondo la serie dei numeri impari ab unitate.)

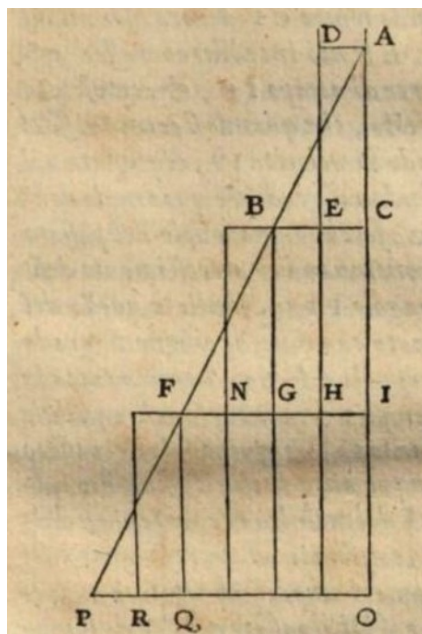


Figura 5.7. Corollarium I. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Interpretato in termini moderni possiamo esprimere questo corollario notando che la differenza tra due quadrati successivi è un numero dispari e quindi i due spazi successivi qualsiasi percorsi nello stesso tempo stanno tra loro come due numeri dispari successivi.

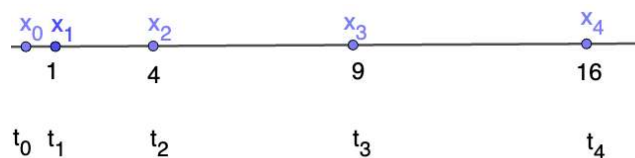


Figura 5.8. Legge dei numeri dispari

Oltre ad esprimere un esempio di serie numerica, rappresenta, probabilmente, il modo attraverso il quale Galilei ha potuto svolgere l'esperimento sul piano inclinato, mediante i campanelli collocati a distanza l'uno dall'altro proporzionali ai numeri dispari.

Nel secondo corollario, invece, viene espressa la proporzionalità tra tempi e radice quadrata degli spazi percorsi. Tale corollario viene usato per dimostrare molte delle successive proporzioni come, ad esempio, il teorema VI.

Corollario (Corollarium II. Caduta verticale). *Colligitur, secundo, quod si a principio lationis sumantur duo spatia quaelibet, quibuslibet temporibus peracta, tempora ipsorum erunt inter se ut alterum eorum ad spatium medium proportionale inter ipsa. Sumptis enim a principio lationis S duobus spatiis ST, SV, quorum medium sit proportionale SX, tempus casus per ST ad tempus casus per SV erit ut ST ad SX. Cum enim demonstratum sit, spatia peracta esse in duplicata ratione temporum, seu (quod idem est) esse ut temporum quadrata; ratio autem spatii VS ad spatium ST sit dupla rationis VS ad SX, seu sit eadem quam habent quadrata VS, SX; patet, rationem temporum lationum per SV, ST esse ut spatiorum, seu linearum, VS, SX. (In secondo luogo si ricava che, se si prendono, a partire dall'inizio del moto, due spazi qualsiasi percorsi in tempi qualsiasi, i rispettivi tempi staranno tra di loro come uno dei due spazi sta al medio proporzionale tra i due spazi dati. Infatti assunti, dal principio del moto S, due spazi ST, SV, dei quali la media sia proporzionale SX, il tempo della caduta per ST starà al tempo della caduta per SV come ST a SX. Poiché è stato dimostrato, gli spazi si sono compiuti nella doppia ragione (proporzione) dei tempi, ossia (cosa che è la medesima) sono come i quadrati dei tempi; il rapporto invece dello spazio VS allo spazio ST sia doppio del rapporto VS a SX, ovvero sia lo stesso che hanno i quadrati VS, SX; è chiaro che la proporzione dei tempi dei moti per SV, ST sia come quella degli spazi o linee VS, SX).*

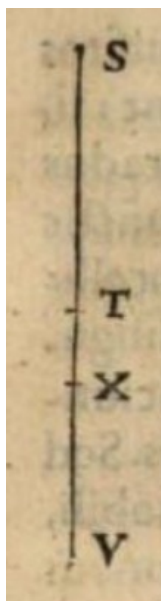


Figura 5.9. Corollarium II. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Interpretato in un linguaggio più familiare, il risultato di tale corollario II si può esprimere attraverso la seguente proporzione, dove SX è il medio proporzionale di ST e SV :

$$t_{ST} : t_{SV} = ST : SX. \quad (5.9)$$

Infatti, per il teorema II possiamo affermare che:

$$ST : SV = t_{ST}^2 : t_{SV}^2 \quad (5.10)$$

Inoltre, essendo SX il medio proporzionale di ST e SV , si ha $SX^2 = ST \cdot SV$ e vale dunque la seguente proporzione:

$$SV : ST = SV^2 : SX^2. \quad (5.11)$$

Dal confronto delle due proporzioni 5.10 e 5.11 segue la tesi espressa dalla 5.11.

Si guidano ora gli studenti nella interpretazione di tale corollario II in modo da poter riconoscere una proprietà del moto a loro ben nota. Indichiamo, infatti, con l il medio proporzionale tra due lunghezze a e b . Allora, per tale corollario si ha: $t_a : t_b = a : l$ da cui segue che $t_a : t_b = a : \sqrt{a \cdot b}$, ovvero

$$t_a : t_b = \sqrt{a} : \sqrt{b}. \quad (5.12)$$

Possiamo ricavare da qui anche che la velocità con la quale cade un corpo è proporzionale alla radice quadrata delle altezze di caduta, ovvero, essendo $v_a = g \cdot t_a$ e $v_b = g \cdot t_b$ segue:

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \quad (5.13)$$

Conviene dedicare un po' di tempo al seguente teorema III, analizzandolo integralmente dal testo di Galilei ²⁹, in quanto, come si vedrà di seguito, nella dimostrazione appare un importante tentativo nascosto di ricorrere a concetti differenziali. Si riconoscono infatti i germi della teoria degli indivisibili. Per dirla con le parole di Giusti, «l'identificazione tra velocità istantanee ed indivisibili è la cerniera attraverso la quale la fisica si impenna alla geometria». (Giusti, 1981)

In questo teorema III Galilei dimostra che:

i tempi di percorrenza lungo un piano inclinato, AC, e della caduta verticale, AB, sono proporzionali alle loro lunghezze. (fig. 5.11).

Teorema. *Teorema III*

Si super plano inclinato atque in perpendiculo, quorum eadem sit altitudo, feratur ex quiete idem mobile, tempora latiorum erunt inter se ut plani ipsius et perpendiculi longitudines. (Se un medesimo mobile si muove, a partire dalla quiete, su un piano inclinato e lungo una perpendicolare, che abbiano eguale altezza, i tempi dei moti staranno tra di loro come le lunghezze del piano e della perpendicolare).

Nella dimostrazione, Galilei utilizza l'assioma ³⁰, che deve porre a fondamento della sua teoria, puramente cinematica, del moto accelerato e cioè l'uguaglianza delle velocità istantanee a parità di quota su piani diversamente inclinati. Egli, infatti, si

²⁹Un'analisi approfondita dal punto di vista storico si trova in Giusti, 1981.

³⁰Galilei, 1638 *op. cit.*, p. 166. Si fa notare che, nell'edizione postuma bolognese delle Opere di Galilei del 1656, è pubblicata per la prima volta un'aggiunta scritta da V. Viviani riportante la dimostrazione del principio, secondo le indicazioni di Galilei, che egli stesso chiede venga inserita nella eventuale successiva edizione dei Discorsi e Dimostrazioni, vd. Galilei, 1890–1907 *op. cit.*, pp. 23–24, vol VIII.

rende conto che per la formalizzazione del moto ha la necessità di individuare dei principi di partenza, così come succede nella geometria euclidea. Quindi introduce l'assioma di seguito riportato che successivamente Newton nei *Principia* supererà, introducendo il secondo principio della dinamica e i concetti differenziali:

Accipio, gradus velocitatis ejusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos tunc esse aequales, cum eorumdem planorum elevationes aequales sint.

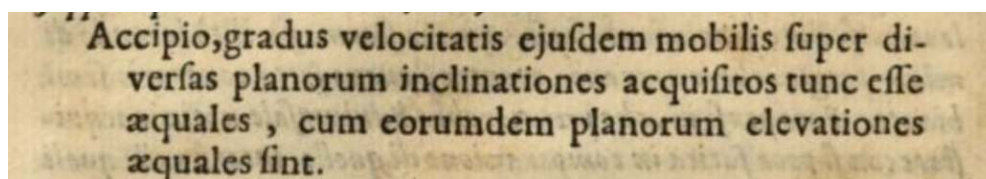


Figura 5.10. Assioma. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Ovvero, Assumo che i gradi di velocità acquistati da un medesimo mobile su piani diversamente inclinati, siano eguali allorché sono eguali le elevazioni di quei medesimi piani.

Un artificio di cui egli discute e di cui riconosce la validità nella consistenza delle sue conseguenze con le osservazioni. Un procedimento di confronto fra assunti e risultati sperimentali che è parte della fisica moderna.

Avendo già dimostrato ³¹ che, «se due spazi vengono percorsi da un mobile che si muova con i medesimi gradi di velocità qual è la proporzione tra gli spazi, tale è quella tra i tempi», egli espande il calcolo ad un segmento finito, che corrisponde al nostro differenziale, e su cui applica le proporzioni proprie del moto uniforme, considerandovi quindi la velocità come costante. Arriva dunque alla conclusione esatta senza poterne dare una dimostrazione matematica formalmente rigorosa.

Di seguito una proposta di come esaminare in classe la dimostrazione formulata da Galilei.

In accordo con Galilei, vogliamo dimostrare che i tempi di percorrenza del piano inclinato AC e della caduta lungo AB (vd. fig. 5.11) stanno tra loro come la lunghezza del piano AC e la sua elevazione AB .

Immagina, dunque, un numero qualsiasi di linee *quotlibet lineae* DG, EI, FL parallele a CB . Dall'assioma sopra riportato, risulta che i gradi di velocità che il mobile, a partire da A (inizio del moto), ha acquistato nei punti G e D , sono uguali, essendo uguali le rispettive distanze dall'orizzonte, (dunque, come scriveremmo oggi $v_G = v_D$). Stesso discorso nei punti I ed E come nei punti L ed F . Il tentativo di passaggio al limite emerge quando immagina di aver condotto non solo queste parallele ma da tutti i punti di AB verso AC *ex punctis omnibus lineae* AB usque

³¹Galilei, 1638 op. cit., Teorema I, giornata terza, De motu aequabili. *Si mobile aequabiliter latum eadem cum velocitate duo pertranseat spatia, tempora latiorum erunt inter se ut spatia peracta.* Se un mobile mosso con la stessa velocità percorre due spazi, i tempi dei moti saranno tra loro come gli spazi completati.

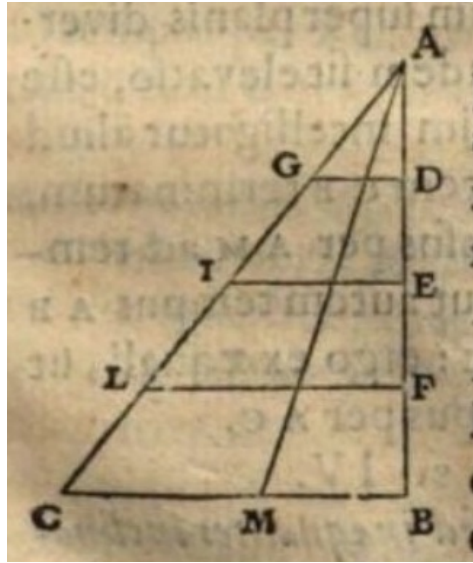


Figura 5.11. Teorema III. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

ad lineam AC, realizzando così una divisione in infinitesimi di un segmento ³². I gradi di velocità nei punti corrispondenti alla stessa altezza (cioè negli estremi di ciascuna parallela a *CB*) saranno sempre uguali tra loro³³, per l'assioma di cui sopra. Dunque se indichiamo con x_i i punti su *AC* e con y_i i punti su *AB*, possiamo affermare che $v_{x_i} = v_{y_i}$. Pertanto, i due spazi *AC* ed *AB* vengono percorsi con gradi di velocità uguali. Avendo già dimostrato che in un moto uniforme³⁴ se due spazi vengono percorsi da un mobile che si muova con i medesimi gradi di velocità qual è la proporzione tra gli spazi, tale è quella tra i tempi, ne deduce:

$$t_{AB}:t_{AC} = AB : AC. \quad (5.14)$$

Tale risultato lo si può interpretare dicendo che nei tratti tra due parallele infinitamente vicine, che possiamo pensare come due differenziali dx_i e dy_i , il moto può essere considerato uniforme con la medesima velocità v_i . Allora, possiamo esprimere i tempi di percorrenza t_{AC} e t_{AB} nel seguente modo:

$$t_{AC} = \sum_i \frac{dx_i}{v_i} \quad (5.15)$$

³²Nei frammenti riportati in Galilei, 1890–1907 pp. 387–388, Galilei divide la linea *AB* in *quasi innumera spaciola*, il cui numero è allo stesso tempo finito e non finito. «[...] finito quando si calcola il tempo in cui ognuno di essi è percorso o quando si opera su di essi con la teoria delle proporzioni, infinito nel momento in cui in ognuno la velocità del mobile viene considerata costante. Corrispondentemente, la lunghezza di questi spaziuncoli è contemporaneamente uguale a zero e diversa da zero, una proprietà o meglio un privilegio degli infinitesimi leibniziani.». (Giusti, 1981)

³³Il moto accelerato viene dunque inteso non come una successione di momenti di velocità che variano con continuità, bensì come un moto composto da una serie di micromovimenti uniformi con velocità costante (Giusti, 1981).

³⁴Galilei ha già dimostrato il Teorema I, *De motu aequabili*, Galilei 138, *op. cit.* p. 151.

e

$$t_{AB} = \sum_i \frac{dy_i}{v_i} \quad (5.16)$$

Ma essendo gli spazi proporzionali, per il teorema di Talete, si ha che:

$$\frac{dx_i}{dy_i} = \frac{AC}{AB} = k \quad (5.17)$$

con k costante.

Dunque, possiamo esprimere dx_i come $k \cdot dy_i$ e quindi:

$$t_{AC} = \sum_i k \cdot \frac{dy_i}{v_i} \quad (5.18)$$

da quest'ultima e dalle 5.15 e 5.16, si ha:

$$\frac{t_{AC}}{t_{AB}} = \frac{k \cdot \sum_i \frac{dy_i}{v_i}}{\sum_i \frac{dy_i}{v_i}} = k \quad (5.19)$$

ovvero, sempre per la 5.17:

$$\frac{t_{AC}}{t_{AB}} = \frac{AC}{AB} \quad (5.20)$$

che è equivalente alla 5.14.

A questo punto, si pone agli studenti la sfida:

- ritrovare tale risultato con gli strumenti acquisiti durante il biennio del liceo
- esplicitare, formulando in un linguaggio moderno, il tentativo di passaggio al limite.

La conduzione di tale lavoro trova nell'IBL un riferimento naturale. Dunque, alla fine, l'output fornito dagli studenti dovrebbe risultare più o meno quello qui di seguito descritto.

Relativamente al primo punto, gli studenti dovrebbero essere in grado rappresentare il problema nel modo qui di seguito descritto.

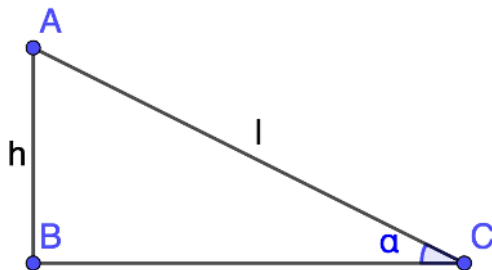


Figura 5.12. Reinterpretazione del Teorema III

Si considera l'equazione oraria del moto lungo il piano inclinato:

$$x(t) = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2$$

Consideriamo la figura 5.12. Quando il mobile, partendo dalla quiete in A arriva a C si ha che $l = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t_l^2$, da possiamo ricavare che il tempo di discesa è il seguente:

$$t_l = l \cdot \sqrt{\frac{2}{h \cdot g}}; \sin \alpha = \frac{h}{l}. \quad (5.21)$$

Sia ora $y(t) = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ la quota, al tempo t . Quando il mobile, partendo dalla quiete in A arriva a B si ha che $0 = h - \frac{1}{2} g \cdot t_h^2$. Pertanto il tempo di caduta lungo AB , risulta il seguente.

$$t_h = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad (5.22)$$

Allora

$$t_l : t_h = l \cdot \sqrt{\frac{2}{h \cdot g}} : \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \implies t_l : t_h = l : h.$$

Nella seconda parte del problema-sfida dovrebbero arrivare alle equazioni già proposte sopra (vd. a partire dalla formula 5.15) .

Lo studio di tale teorema, si completa analizzandone il corollario.

Corollario. *Hinc colligitur, tempora descensus super planis diversimode inclinatis, dum tamen eorum eadem sit elevatio, esse inter se ut eorum longitudines. Si enim intelligatur aliud planum AM ex A ad eundem horizontem CB terminatum, demonstrabitur pariter, tempus descensus per AM ad tempus per AB esse ut linea AM ad AB ; ut autem tempus AB ad tempus AC , ita linea AB ad AC ; ergo, ex aequali, ut AM ad AC , ita tempus per AM ad tempus per AM ad tempus per AC . (I tempi impiegati a scendere su piani diversamente inclinati, ma con medesima elevazione, stanno tra loro come le rispettive lunghezze. Se infatti si intenda un altro piano AM da A terminato allo stesso orizzonte CB , si dimostrerà ugualmente che il tempo di discesa per AM fino al tempo per AB è come la linea AM a AB ; come invece il tempo AB al tempo AC , così la linea AB verso AC ; dunque, da uguale, come AM verso AC , così il tempo per AM al tempo per AM al tempo per AC .)*

Con analoga metodologia improntata sull'IBL, si condurranno gli studenti a verificare sperimentalmente le affermazioni che il corollario espone. L'accordo al quale si dovrà arrivare in maniera condivisa riguarderà le velocità d'uscita da piani inclinati di diversa lunghezza ma di pari elevazione, coerentemente con il sopra citato corollario. Gli studenti dimostreranno che partendo dall'assioma delle velocità, sussiste l'uguaglianza tra il rapporto delle lunghezze dei piani inclinati e il rapporto dei relativi tempi di percorrenza. L'obiettivo è che infine gli studenti sappiano riconoscere che tale risultato è equivalente al principio di conservazione dell'energia

$$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v^2.$$

Il teorema V, qui di seguito riportato, esprime un risultato cinematico derivabile dall'equazione del moto, e quindi già noto fin dal biennio. Non potendo però

affrontare la dimostrazione di tutti i teoremi necessari al mio scopo didattico, ho deciso di proporre in questo caso solo una interpretazione dell'enunciato nel linguaggio attuale.

Teorema. *Teorema V*

Ratio temporum descensuum super planis, quorum diversae sint inclinationes et longitudines, nec non elevationes inaequales, componitur ex ratione longitudinum ipsorum planorum et ex ratione subdupla elevationum eorumdem permutatim accepta. (La proporzione tra i tempi dei moti su piani di diversa lunghezza e diversa inclinazione, è composta della proporzione tra le rispettive lunghezze e della sudduplicata proporzione delle elevazioni dei medesimi piani permutatamente prese [radice quadrata del rapporto inverso tra le elevazioni]).

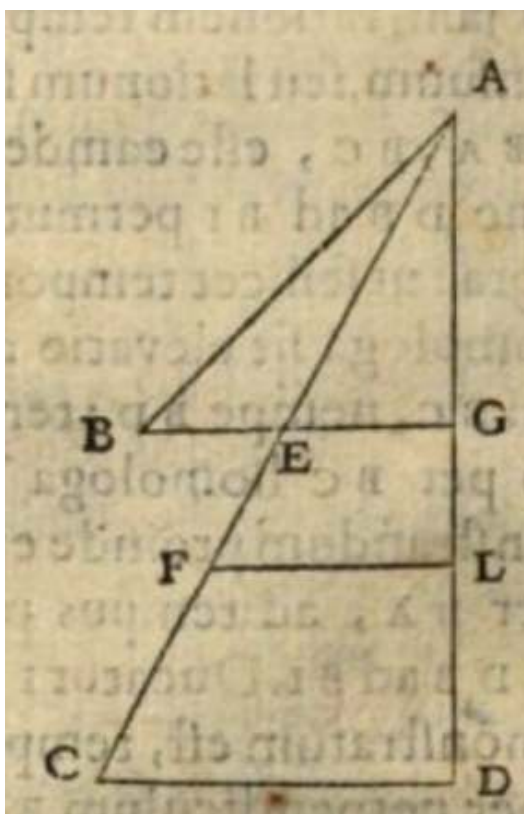


Figura 5.13. Teorema V. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Il teorema afferma che la proporzione tra i tempi dei moti su piani di diversa lunghezza e di diversa inclinazione è composta della proporzione tra le rispettive lunghezze e della radice quadrata del rapporto inverso tra le elevazioni. Continuando il lavoro d'indagine ed utilizzando quanto da loro già elaborato precedentemente ed espresso nella 5.21, gli studenti alla fine saranno in grado di esprimere le seguenti relazioni:

$$t_{AB} = AB \cdot \sqrt{\frac{2}{AG \cdot g}}$$

$$t_{AC} = AC \cdot \sqrt{\frac{2}{AD \cdot g}}$$

da cui, si ottiene che:

$$\frac{t_{AB}}{t_{AC}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sqrt{AD}}{\sqrt{AG}}.$$

Siamo quasi al termine del primo modulo, che si completa con la presentazione dei seguenti Teorema VI e del Teorema XIX.

Il teorema VI è fondamentale per la dimostrazione del teorema XXII e pertanto ho inserito nella attività l'analisi della dimostrazione proposta nella fonte storica. In realtà, Galilei fornisce ben tre dimostrazioni di tale teorema, tra le quali è difficile scegliere, in quanto ognuna di esse presenta spunti didattici molto interessanti. La prima e la terza dimostrazione però, ritengo siano le più comprensibili per gli studenti. Per completezza riporto entrambe le possibilità.

Teorema. *Teorema VI. (Teorema delle corde)*

Si a puncto sublimi vel imo circuli ad horizontem erecti ducantur quaelibet plana usque ad circumferentiam inclinata, tempora descensuum per ipsa erunt aequalia. (Se da un punto situato all'estremo superiore o inferiore di un cerchio disposto verticalmente rispetto all'orizzonte si tracciano piani inclinati che terminano sulla circonferenza, i tempi di discesa lungo tali piani saranno uguali.)

Attraverso questo teorema Galilei dimostra una delle proprietà più importanti, ovvero che, a partire dalla quiete i tempi di discesa lungo le corde di una circonferenza sono uguali e quindi i tempi di percorrenza sono indipendenti dalla lunghezza della corda³⁵. E' utile evidenziare l'importanza di tale teorema che costituisce il primo passo verso l'isocronismo del pendolo.

Vediamo come proporre in classe la:

Prima dimostrazione presentata da Galilei

Come appare in fig. 5.14, considera un cerchio sull'orizzonte GH ed FA diametro ad esso perpendicolare. Dimostra che i tempi di discesa lungo i piani AB e AC sono uguali. Gli studenti, stimolati e guidati nell'osservazione, applicheranno le loro conoscenze di geometria euclidea per riconoscere rispettivamente le quarte proporzionali che permettono di scrivere: $AC^2 = AE \cdot AF$ e $AB^2 = AD \cdot AF$. Inoltre, dalla proporzione: $(AE \cdot AF) : (AD \cdot AF) = AE : AD$ loro proposta ne ricaveranno che:

$$AC^2 : AB^2 = AE : AD \tag{5.23}$$

³⁵Un'analisi di carattere più squisitamente storico-epistemologica di tale risultato si trova in Giusti, 1981.

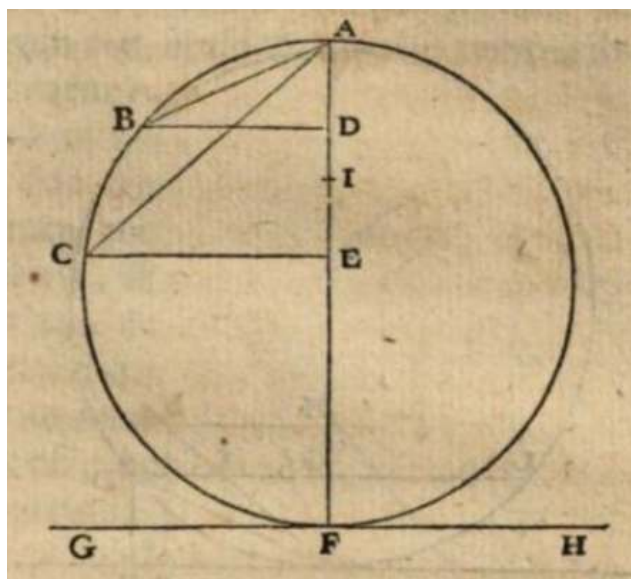


Figura 5.14. Teorema VI-1. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Si passa poi a considerare la AI , media proporzionale tra le altezze AD e AE , cioè

$$AD \cdot AE = AI^2 \quad (5.24)$$

E' l'occasione questa per richiamare argomenti pregressi di geometria euclidea e anche per riflettere sull'uso insolito di tali contenuti in contesti non strettamente geometrici bensì cinematici. Dopo una serie di manipolazioni, ovvero dividendo la 5.24 per AD^2 , si ottiene $AE : AD = AI^2 : AD^2$. Da quest'ultima e dalla 5.23 si ricava che $AC^2 : AB^2 = AI^2 : AD^2$ e quindi:

$$AC : AB = AI : AD \quad (5.25)$$

A questo punto bisogna esprimere il rapporto dei tempi di percorrenza delle due corde AC e AB , e gli studenti dovranno riconoscere che tale rapporto è esprimibile attraverso l'applicazione del teorema V precedentemente analizzato, e cioè che il rapporto tra i tempi di discesa per AC e per AB è composto dalle proporzioni di AC ad AB e la sudduplicata proporzione delle elevazioni permutatamente prese DA ad AE (rapporto pari alla radice quadrata del rapporto inverso tra le elevazioni), ovvero:

$$t_{AC} : t_{AB} = (AC \cdot \sqrt{AD}) : (AB \cdot \sqrt{AE}) \quad (5.26)$$

Nel testo di Galilei che presenta una matematica geometrica e non algebrica, non vi è presente la notazione delle radici quadrate. Risulta però didatticamente più efficace l'utilizzo del simbolismo moderno, al fine di far comprendere meglio la portata del risultato.

Moltiplicando il secondo membro della 5.26 per $\sqrt{AD}$ si ottiene la seguente proporzione che risulta più funzionale alla dimostrazione:

$$t_{AC} : t_{AB} = (AC \cdot AD) : (AB \cdot AI) \quad (5.27)$$

Si completa la dimostrazione facendo dedurre agli studenti dalla 5.27 e dalla 5.25 che³⁶:

$$t_{AC} : t_{AB} = (AC \cdot AB) : (AB \cdot AC) \equiv 1 \quad (5.28)$$

Pertanto i tempi di discesa sono uguali.

Vediamo adesso come proporre in classe la:

Terza dimostrazione presentata da Galilei

Rendiamo esplicito fin da subito che Galilei stesso ci riferisce essere più spedita la seguente dimostrazione.

Anche in questo caso, come si vede dalla figura 5.15, considera un cerchio eretto sull'orizzonte AB , il cui diametro CD è perpendicolare all'orizzonte. Dimostra che la discesa lungo il piano DF e la caduta lungo DC di un medesimo mobile si compiono nello stesso tempo.

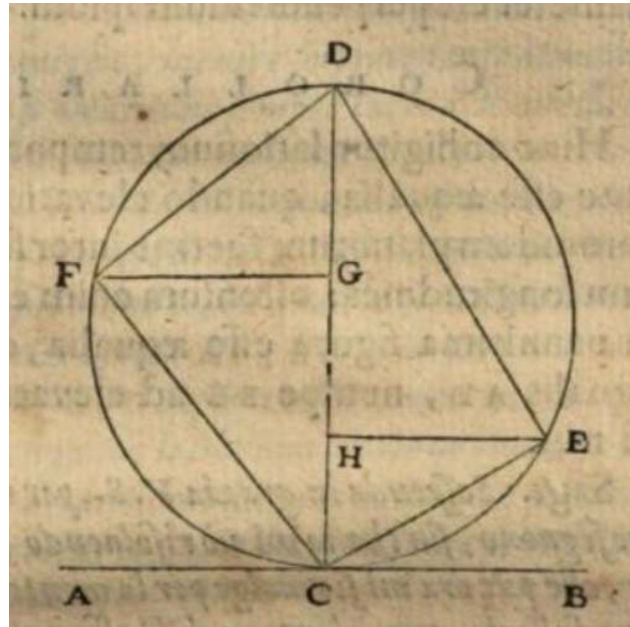


Figura 5.15. Teorema VI-3. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Considera la perpendicolare FG al diametro DC e una corda FC . Il docente inviterà dunque gli studenti ad applicare il corollario II del teorema II, *De motu naturaliter accelerato*, precedentemente analizzato, che esprime la proporzione tra il tempo di caduta su DC e il tempo di caduta su DG come la proporzione tra la media proporzionale tra CD e DG e DG stesso. Gli studenti, considerando il triangolo DFG , potranno facilmente dedurre che DF è proprio la media proporzionale cercata tra CD e DG , ricavando così:

$$t_{DC} : t_{DG} = DF : DG \quad (5.29)$$

³⁶Si moltiplica la 5.25 per $\frac{AB}{AC}$, ottenendo $(AC \cdot AB) : (AB \cdot AC) = (AI \cdot AB) : (AD \cdot AC)$.

Inoltre, opportunamente guidati troveranno utile applicare il teorema III, *de motu naturaliter accelerato*, espresso dalla proporzione 5.14, pervenendo così alla seguente proporzione:

$$t_{DF} : t_{DG} = DF : DG \quad (5.30)$$

Dunque, anche in questo caso si dedurrà che il tempo della caduta per DC e della discesa per DF sono uguali in quanto, come si evince dalle 5.29 e 5.30, hanno la medesima proporzione verso il medesimo tempo per DG .

A questo punto, gli studenti possono dimostrare, in maniera autonoma e seguendo i passaggi scoperti insieme, che se dall'estremo inferiore C si eleva una corda EC , il tempo di discesa da EC è uguale al tempo di caduta da DC .

Come già proposto per il teorema III, gli studenti potrebbero anche rielaborare l'enunciato e la terza dimostrazione in un linguaggio loro più familiare, pervenendo ad un simile risultato.

L'enunciato può oggi essere espresso dicendo che il tempo di percorrenza in una circonferenza lungo qualsiasi piano inclinato risulta essere:

$$\sqrt{\frac{2}{g} \cdot d}$$

dove d è il diametro della circonferenza.

Essendo, infatti, DFC simile ad FDG si ha $DC : DF = DF : DG$, ovvero, ponendo $DF = l$, $DC = d$ e $DG = h$ ne segue che

$$l^2 = h \cdot d. \quad (5.31)$$

Sostituendo la 5.31 nella 5.21, frutto della rielaborazione del teorema III (ovvero, in

$t = l \cdot \sqrt{\frac{2}{h \cdot g}}$), si ha che:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{g}}$$

e dunque ne segue che il tempo di percorrenza è indipendente dalla lunghezza della corda³⁷.

Ultima considerazione è relativa al corollario 2 della proposizione, in cui Galilei dimostra che vale anche il viceversa del teorema, cioè che se da un medesimo punto partono una perpendicolare all'orizzonte ed un piano inclinato tali che i tempi di discesa siano eguali, quella perpendicolare e quel piano inclinato risultano inscrittibili in una semicirconferenza, il cui diametro è la perpendicolare medesima.

Si conclude l'attività con l'analisi del teorema XIX.

Teorema. *TEOREMA XIX.*

Si ex aliquo puncto lineae horizontalis descendat perpendiculum, ex alio vero puncto in eadem horizontali sumpto ducendum sit planum usque ad perpendiculum, per quod mobile tempore brevissimo usque ad perpendiculum descendat; tale planum erit illud quod de perpendiculo

³⁷vd. anche Giaquinta, 2014a pp.222-224.

abscindit partem aequalem distantiae puncti accepti in horizontali a termino perpendiculari. (Se da un punto di una linea orizzontale scende una perpendicolare e da un altro punto, preso sulla medesima orizzontale, si deve condurre fino alla perpendicolare un piano inclinato, sul quale il mobile impieghi il tempo più breve per scendere fino alla perpendicolare; tale piano sarà quello che stacca dalla perpendicolare un tratto eguale alla distanza che intercorre tra il [secondo] punto preso sull'orizzontale e l'estremo della perpendicolare.)

Con questo teorema, Galilei, dimostra che il piano inclinato che minimizza il tempo per raggiungere una retta verticale da un punto esterno è inclinato di 45° . E' un altro dei pilastri necessari per affrontare la dimostrazione del teorema XXII, data la sua rilevanza ho ritenuto importante analizzarne anche la dimostrazione, ma questa volta discostandomi dal testo originale e seguendo la riformulazione proposta da Giaquinta³⁸. Nel contesto didattico, infatti, il processo di apprendimento ispirato alla storia necessita di un adattamento curato dal docente: gli studenti dovrebbero essere guidati nelle attività, in modo che possano ricapitolare il processo di scoperta dell'umanità in uno scenario opportunamente adattato per loro, dove la storia viene 'modificata' in modo mirato e consapevole dal docente (vd. paragrafo 3.2.1).

Analizzando dunque la figura 5.16 nella quale poniamo $BC = r$ e applicando la

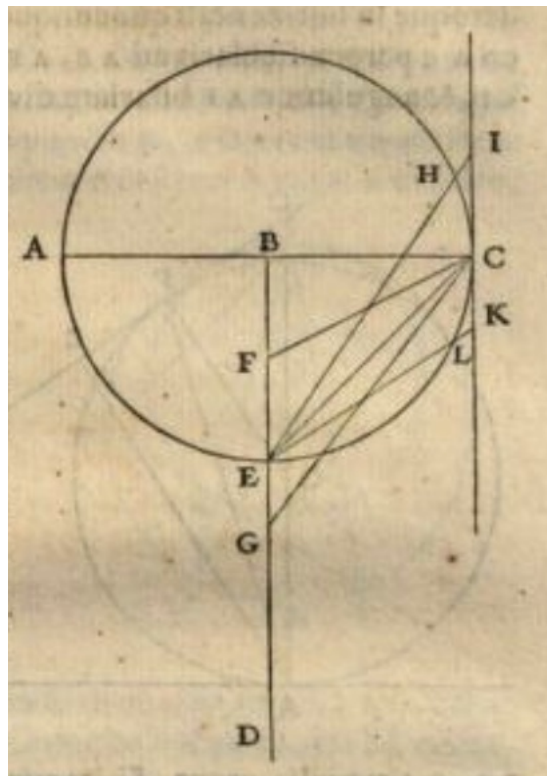


Figura 5.16. Teorema XIX. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

5.21 (ovvero, $t = l \cdot \sqrt{\frac{2}{h \cdot g}}$) che gli studenti avevano già ricavato dalla riformulazione del teorema III, si può affermare che il tempo impiegato per andare da C ad F è dato da:

³⁸vd. Giaquinta, Roma 2014, *op. cit.* p. 224.

$$t = CF \cdot \sqrt{\frac{2}{BF \cdot g}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{BF^2 + r^2}{BF}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{BF + \frac{r^2}{BF}}.$$

Tale tempo risulta minimo per $BF = r$, individuando così un piano inclinato CF di inclinazione 45° .

La verifica di ciò può rappresentare una utile attività di approfondimento da sottoporre agli studenti per la ricerca dei punti stazionari di una funzione.

L'attività 3 si chiude qui. Mi preme sottolineare che, durante la conduzione di tutto il lavoro, si è evidenziato l'utilizzo del lessico scientifico adottato da Galilei: ad esempio, l'espressione *gradus velocitatis*, di provenienza medievale, attestato nell'opera di Nicola Oresme, come sinonimo di *momentum velocitatis* per indicare la velocità istantanea. Il termine *latio, -onis* (*latum* da *fero*), spesso presente, come ad esempio, nel corollario II del teorema II, del *De motu naturaliter accelerato* è da intendersi come moto da un originario 'atto di portare, proporre', già attestato in Cicerone, Livio e Gellio. L'*impetum* fa riferimento spesso all'energia cinetica, altre volte indica quella che oggi denominiamo quantità di moto. Il termine *gravitas* può essere interpretato invece come la forza peso³⁹.

5.7.6 Attività 4: Analisi del Teorema XXII

Nell'ultima attività del Modulo I, si affronta il cuore del problema, ovvero la dimostrazione del teorema XXII e del suo *scholium*.

La dimostrazione è più articolata rispetto alle precedenti che abbiamo esaminato, inoltre, è difficile da seguire anche causa del formalismo adottato per indicare i tempi, che in questo caso sono tanti e quindi aggiungono complessità. Ho proposto pertanto un lavoro di reinterpretazione e riscrittura della dimostrazione in un linguaggio più familiare. Lo studente, in tal modo, ha la possibilità di ripercorrere in maniera abbastanza fedele la scoperta di Galilei ma in uno scenario opportunamente a lui adattato che gli consentirà comunque di apprezzare la bellezza della tecnica dimostrativa (vd. paragrafo 3.2.1).

Teorema. TEOREMA XXII.

Si in circulo ad horizontem erecto ab imo puncto elevetur planum non maiorem subtendes circumferentiam quadrante, a terminis cuius duo plania ad quodlibet circumferentiae punctum inflectantur, quam in solo priori plano elevato, vel quam in altero tantum ex illis duobus, nempe in inferiori. (Se in un cerchio, eretto sull'orizzonte, dal suo punto più basso si innalza un piano inclinato, il quale sottenda un arco non maggiore di un quadrante, e se dagli estremi di tale piano si conducono due altri piani inclinati a un qualsiasi punto dell'arco, la discesa lungo [il sistema di] questi due ultimi piani inclinati si compirà in minor tempo che lungo il solo primo piano inclinato, o che lungo uno soltanto di questi due ultimi piani, e precisamente l'inferiore).

Con questo teorema Galilei vuole dimostrare che, in riferimento alla figura 5.17, il tempo lungo il sistema dei due piani inclinati DBC è più breve del tempo di discesa lungo il solo DC o lungo l'unico BC a partire dalla quiete in B .

³⁹Per uno studio più approfondito dei termini in Galilei vd. anche Galluzzi, 1979

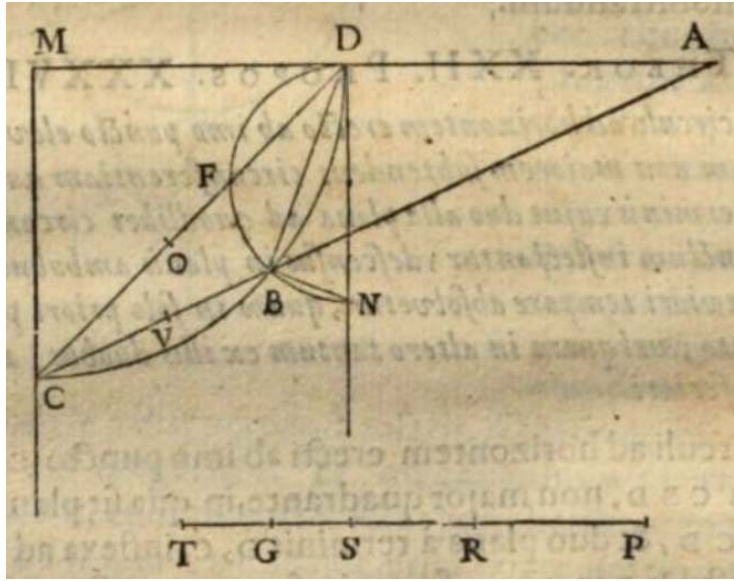


Figura 5.17. Figura del teorema XXII. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Dall'analisi del grafico, si evince che Galilei, applicando il teorema XIX, considera la corda DC con angolazione di 45° , ovvero la linea retta di discesa minima. Gli studenti vengono guidati nell'affrontare la dimostrazione, richiamando tutti i risultati e le considerazioni elaborate nell'attività precedente, come ad esempio, il confronto tra i moti dei piani inclinati CA e CD aventi stessa elevazione (corollario del teorema III), il teorema VI delle corde (vd. paragrafo 5.7.5) applicato alle circonferenze CBD e DBN per affermare rispettivamente che le corde CD e CB così come le corde DF e DB sono percorse in tempi uguali.

Vediamo più nel dettaglio la figura 5.17. Sull'arco DC considera un punto qualunque B . Prolunga CB che incontrerà in A il prolungamento di MD . Conduce poi la perpendicolare DN ad MD e la perpendicolare BN a BD . La semicirconferenza BND circoscritta al triangolo DBN incontra poi CD in F .

Come anticipato, nella semicirconferenza DBN e analogamente nella semicirconferenza DBC , si chiede di applicare il teorema delle corde, deducendo rispettivamente che i tempi di percorrenza delle corde DF e DB così come nell'arco di circonferenza CBD quelli delle corde DC e BC sono uguali, cioè:

$$t_{DF} = t_{DB} \quad (5.32)$$

$$t_{CD} = t_{CB} \quad (5.33)$$

L'applicazione del teorema III ai piani inclinati CA e CD permetterà agli studenti di dedurre le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} t_{AC} &\propto AC \\ t_{DC} &\propto CD \end{aligned} \quad (5.34)$$

Il rapporto tra gli intervalli di tempo dovrebbe evocare negli studenti l'utilizzo del corollario II del teorema II (*De motu naturaliter accelerato*, giornata

terza) che Galilei usa introducendo i medi proporzionali DO tra DC e DF , AV tra AC e AB e CD medio proporzionale tra AC e CB (per similitudine dei triangoli CDB e ADC).

Nella dimostrazione proposta, al fine di favorirne la comprensione da parte degli studenti, ho scelto di usare la riformulazione del risultato utilizzando il formalismo algebrico delle radici quadrate loro più familiare (vd. formula 5.12). Pertanto:

$$\sqrt{DC} : \sqrt{DF} = t_{DC} : t_{DF} \quad (5.35)$$

$$\sqrt{AC} : \sqrt{AB} = t_{AC} : t_{AB} \quad (5.36)$$

Ecco adesso l'elemento topico della dimostrazione, un bell'esempio di riconduzione ad un altro problema più semplice: Galilei afferma che per dimostrare la tesi basta a questo punto provare che il mobile percorre BC dopo la caduta DB più velocemente di quanto percorra FC dopo aver percorso DF .

Osserva ancora che il mobile proveniente da D lungo DB percorre BC nello stesso tempo che se provenisse da A lungo AB , in quanto da ciascuna delle due discese DB e AB , aventi la stessa elevazione, arriverebbe con la stessa velocità nel punto B . Gli studenti riconosceranno che questa deduzione è una conseguenza del teorema III e dell'*accipio* sul quale esso si basa. Galilei, dunque, in virtù della stessa velocità d'uscita nel punto B , riconduce il problema a dimostrare che BC viene percorsa dopo AB in minor tempo che FC dopo DF .

A questo punto, seguendo un processo di adattamento che favorisce l'apprendimento (vd. paragrafo 3.2.1), ho indicato con T l'intervallo di tempo impiegato dal moto che non parte dalla quiete.

In tal modo viene facile per gli studenti formalizzare i seguenti risultati:

$$t_{DC} = t_{DF} + T_{FC} \quad (5.37)$$

$$t_{DBC} = t_{DB} + T_{BC} \quad (5.38)$$

Dalle 5.37 e 5.38 ed essendo $t_{DF} = t_{DB}$ per la 5.32, segue:

$$t_{DC} > t_{DBC} \iff T_{FC} > T_{BC} \quad (5.39)$$

Applicando le proprietà dell'invertire e dello scomporre alla proporzione 5.35 si perviene alla seguente proporzione:

$$(t_{DC} - t_{DF}) : t_{DC} = (\sqrt{DC} - \sqrt{DF}) : \sqrt{DC}$$

da cui segue:

$$T_{FC} : t_{DC} = (\sqrt{DC} - \sqrt{DF}) : \sqrt{DC} \quad (5.40)$$

Applicando le proprietà dell'invertire e dello scomporre alla proporzione 5.36 si ha:

$$(t_{AC} - t_{AB}) : t_{AC} = (\sqrt{AC} - \sqrt{AB}) : \sqrt{AC}$$

dalla quale si ha:

$$T_{BC} : t_{AC} = (\sqrt{AC} - \sqrt{AB}) : \sqrt{AC} \quad (5.41)$$

Conviene riscrivere le 5.40 e 5.41, tenendo conto delle relazioni 5.34, nel seguente modo:

$$T_{FC} = \left((\sqrt{CD} - \sqrt{DF}) : \sqrt{CD} \right) \cdot k \cdot DC \quad (5.42)$$

$$T_{BC} = \left((\sqrt{AC} - \sqrt{AB}) : \sqrt{AC} \right) \cdot k \cdot AC \quad (5.43)$$

da cui, si deduce che:

$$T_{FC} > T_{BC} \iff (CD - \sqrt{DF \cdot DC}) > (AC - \sqrt{AB \cdot AC}) \quad (5.44)$$

Si considera con attenzione la disequaglianza 5.44 in modo da stimolare negli studenti la riflessione che per arrivare alla tesi è sufficiente dimostrare la seguente disequaglianza:

$$CD - DO > AC - AV \quad (5.45)$$

Ma ciò equivale a dire che:

$$CO > CV \quad (5.46)$$

che diventa la nostra nuova tesi. Dimostriamo innanzitutto (quello che Galilei indica come lemma) che, se $CF > CB$ e $DF < AB$, allora:

$$\frac{CD}{DF} > \frac{AC}{AB} \quad (5.47)$$

Si può dedurre che essa è vera in base alle seguenti constatazioni. Innanzitutto:

$$CF > CB \quad (5.48)$$

in quanto CFB è rettangolo in $\hat{B}$. Infatti, l'angolo $F\hat{D}M$ misura 45° ma nella semicirconferenza DFN gli angoli $F\hat{D}M$ e $F\hat{B}D$ insistono sullo stesso arco $\widehat{DF}$ e sono dunque congruenti. Nella circonferenza CBD , invece, si osserva che l'angolo $C\hat{B}D$ misura 135° , dunque l'angolo $C\hat{B}F$, per sottrazione risulta retto.

Inoltre, dalla similitudine tra DFB e DBA ($F\hat{B}D \cong \widehat{DBA}$ e $F\widehat{DB} \cong \widehat{DAB}$) si deduce che:

$$DF < AB \quad (5.49)$$

Dalle 5.48 e 5.49 si ricava dunque:

$$\frac{CF}{DF} > \frac{BC}{AB} \quad (5.50)$$

Vale, inoltre, la disequaglianza $CD < AB$ (essendo CDA ottusangolo in $\hat{D}$) che possiamo esprimere nel seguente modo:

$$CF + FD < BC + AB \quad (5.51)$$

Possiamo esprimere poi i rapporti tra CD e DF e tra AC e AB nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{CD}{DF} &= \frac{CF + DF}{DF} = \frac{CF}{DF} + 1 \\ \frac{CA}{AB} &= \frac{BC + BA}{AB} = \frac{BC}{AB} + 1 \end{aligned} \quad (5.52)$$

Dalle 5.52 si riconduce, infine, la disuguaglianza 5.47 che dobbiamo dimostrare alla disuguaglianza 5.50 sopra dimostrata. Galilei conclude la dimostrazione considerando le seguenti due relazioni di proporzionalità che deduce dalle relazioni di medio proorzionale:

$$CD : DF = (CO)^2 : (OF)^2$$

$$CA : AB = (CV)^2 : (VB)^2$$

dalle quali, confrontando con la 5.47 segue che:

$$CO : OF > CV : VB$$

Da tale disuguaglianza, per il lemma predetto, Galilei ne deriva la disuguaglianza 5.46 che è equivalente alla tesi.

Ripercorrere la dimostrazione di questo teorema consente di mettere in atto tutta una serie di competenze, sia geometriche di base sia acquisite durante il percorso.

5.7.7 Attività 4: Analisi dello Scholium

Si ritorna allo scholium dal quale eravamo partiti ne paragrafo 5.7.2: gli studenti, a questo punto, hanno acquisito le competenze necessarie per apprezzare il bel ragionamento proposto da Galilei.

Si affronta la lettura del testo originale in compresenza con la docente di latino, di cui di seguito si riporta la traduzione.

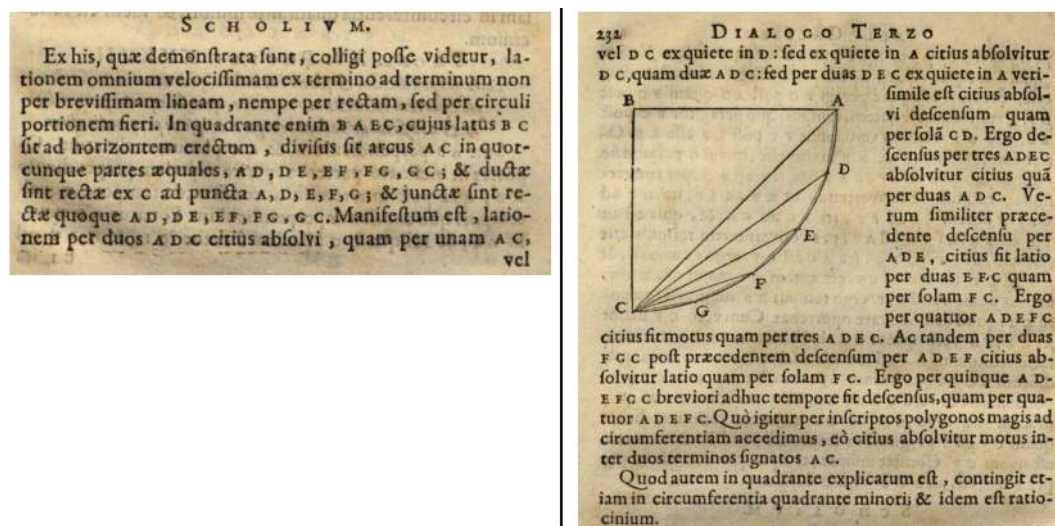


Figura 5.18. Scholium del teorema XXII. Discorsi e dimostrazioni, Leida 1638.

Da quanto si è dimostrato sembra si possa ricavare (colligi posse videtur) che il movimento più veloce da estremo ad estremo non avviene lungo la linea più breve, cioè la retta, ma lungo un arco di cerchio. Infatti, nel quadrante BAEC, il cui lato BC sia eretto sull'orizzonte, si divida l'arco AC in un numero qualsiasi di parti eguali AD, DE, EF, FG, GC; da C si conducano le corde ai punti A, D, E, F, G, e si traccino pure le corde AD, DE, EF, FG, GC:

è manifesto che il movimento lungo le due corde ADC si compie più presto che lungo la sola AC , o lungo DC a partire dalla quiete in D . Ma a partire dalla quiete in A , DC viene percorsa più presto di ADC : ma lungo le due DEC a partire dalla quiete in A , è verosimile che la discesa si compia più presto che non lungo la sola CD : dunque, la discesa lungo le tre corde $ADEC$ si compie più presto che non lungo le due ADC . E similmente, dopo la discesa lungo ADE , il movimento si svolge più presto lungo le due corde EFC che non lungo la sola EC ; dunque, lungo le quattro corde $ADEFC$ il movimento si svolge più presto che non lungo le tre $ADEC$. E infine, lungo le due corde FGC , dopo la discesa lungo $ADEF$, il movimento si compie più presto che non lungo la sola FC ; dunque, lungo le cinque corde $ADEFGC$ la discesa si svolge in un tempo ancora più breve che non lungo le quattro $ADEFC$. Pertanto, quanto più, con poligoni inscritti [poligonali iscritte] ci avviciniamo alla circonferenza, tanto più presto si compie il moto tra i due segnati estremi A e C . Ciò che si è mostrato in un quadrante, accade anche in un arco di circonferenza minore di un quadrante; e identico è il ragionamento.

Emerge in modo evidente l'idea implicita di passaggio al limite, che in qualche modo ricorda il metodo di esaustione.

La riflessione da attivare in classe, è relativa proprio all'iterazione da $t_{AC} > t_{AD} + t_{DC}$ a $t_{DC} > t_{DE} + t_{EC}$ che non è affatto scontata in quanto in D il mobile ha velocità iniziale diversa da zero.

La seconda riflessione da avviare è in relazione a ciò che Galilei effettivamente vuole dimostrare, ovvero che il movimento lungo un arco di circonferenza sarebbe più veloce di qualunque poligonale inscritta ma non dimostra in realtà che tale arco è proprio la brachistocrona, ovvero la linea più breve, la sua matematica infatti non glielo permette.

Quello della curva che minimizza il tempo percorso è un problema che lui inizialmente affronta lavorando con un piano inclinato per il quale dimostra che il piano minimizzante il tempo di percorrenza forma un angolo di 45° con la verticale. Quando poi spezza il percorso su tale piano inclinato in un sistema di due piani inclinati si trova davanti ad un problema estremamente complicato da risolvere con la matematica classica, riuscendo a dimostrare che può abbassare il tempo di percorrenza sul suddetto piano muovendosi su un arco di circonferenza ⁴⁰.

Al termine di questo modulo sono necessarie alcune considerazioni da analizzare insieme agli studenti. Galilei non può dirsi un grande matematico nel senso letterale de termine ma sicuramente lo è in quanto «introdusse una mentalità nuova anche nell'indagine matematica e perché aprì per essa nuove vie di pensiero» (Lombardo Radice e Segre, 1967). Emerge sicuramente l'idea di una nuova matematica necessaria per esprimere concetti cinematici. D'altra parte, è evidente la debolezza della teoria delle proporzioni di Euclide e delle relative rappresentazioni geometriche nell'affrontare problemi di tipo cinematico. Galilei non conosce la rivoluzione dell'algebra avviata da Viète e da Cartesio e quindi investe sull'assioma della quarta proporzionale che gli permette di ridurre le grandezze da lui considerate a segmenti. Una criticità risiede nel fatto che non sempre esiste la quarta proporzionale nelle grandezze discrete. Da qui la necessità di una revisione e riformulazione della

⁴⁰Vd. anche Rogora, 2016

definizione delle grandezze proporzionali, che però non è sufficiente in quanto la teoria delle proporzioni non è lo strumento adatto per descrivere il moto come invece risulterà il calcolo differenziale ⁴¹, come Galilei ha tentato di fare (Giusti, 1993).

Un spunto di riflessione conclusiva lo offrono sicuramente le parole di Enrico Giusti che descrivono perfettamente la condizione dello scienziato Galilei: «Se si guarda dunque ai *Discorsi* con l'occhio rivolto ai successivi sviluppi, questi ci appaiono come l'inizio della scienza moderna; il primo gradino di un cammino che ancora prosegue nella direzione tracciata dallo scienziato pisano.

Vista invece come punto d'arrivo del percorso intellettuale che in queste pagine abbiamo tentato di ricostruire, la teoria del moto che il prigioniero di Arcetri invia verso la libera Olanda ha le caratteristiche se non di una sconfitta almeno di un ripiegamento. Destino forse obbligato delle opere di grandi spiriti, che vedono al di là del proprio tempo e delle proprie possibilità» (Galilei, 1990).

⁴¹vd. anche Lombardo Radice e Segre, 1967

5.8 Modulo 2: La sfida lanciata da Johann Bernoulli: due proposte di risoluzione

Eccoci dunque, con un salto temporale di circa 60 anni, durante i quali si è assistito alla nascita del calcolo infinitesimale, pronti ad affrontare le risoluzioni del problema proposte dai fratelli Bernoulli. Come vedremo, la matematica il formalismo ed i grafici che utilizzano, risulta molto più familiare agli studenti, riducendo così quell'effetto di shock culturale (vd. 3.2.1) ma allo stesso tempo consolidando in loro la coscienza della necessità del nuovo calcolo. Le attività ⁴² previste sono le seguenti:

- Attività 1 (3 h): La sfida di Johann e la sua proposta di risoluzione
- Attività 2 (3 h): La proposta di risoluzione del fratello Jakob

Sempre secondo un approccio per illuminatura (vd. par. 3.2.1), conviene fornire preliminarmente qualche elemento biografico di Johann e Jakob⁴³, da cui emerge anche il clima del tempo, le difficoltà in famiglia nell'intraprendere gli studi desiderati e le rivalità che si scatenavano tra i matematici del tempo. sono tutti aspetti che in qualche modo e con le opportune modifiche sono presenti oggi giorno nel nostro quotidiano.

Jakob (Basilea 1654-1705) capostipite della gloriosa dinastia di ben otto matematici e Johann (Basilea 1667-1748), provengono da una ricca e importante famiglia svizzera. Jakob si laureò, costretto dai genitori, in filosofia ma studiò contro il loro volere matematica ed astronomia. I suoi principali interessi diventarono la matematica e la fisica teorica. Johann studiò medicina ma al contempo, anche matematica col fratello, in particolare quel nuovo calcolo differenziale di Leibniz nel quale divennero entrambi molto esperti. Gli interessi principali di Johann riguardavano il nuovo calcolo e la meccanica; insegnò il nuovo calcolo di Leibniz al marchese de L'Hôpital ed ebbe tra gli allievi Eulero.

Si dedicarono entrambi a sviluppare e diffondere la nuova teoria di Leibniz del calcolo differenziale. Il loro rapporto col tempo degenerò in una forte rivalità che durò fino alla morte di Jakob. Probabilmente quest'ultimo capiva che il fratello era più dotato e ciò era fonte di attriti. Johann spostò poi sul figlio Daniel la rivalità avuta col fratello, al punto da falsificare la datazione del trattato *Hydraulica* per mostrare di aver raggiunto i risultati prima che il figlio pubblicasse *Hydrodinamica*.

5.8.1 Attività 1: La sfida di Johann e la sua proposta di risoluzione

Si avvia l'attività soffermandosi inizialmente sull'importanza degli *Acta Eruditorum*, periodico mensile in lingua latina (equiparabile alle riviste attualmente più prestigiose, come *Nature*) fondato da Otto Mencke e Gottfried Leibniz pubblicato per un secolo intero, dal 1682 al 1782, in Germania. E' una delle prime riviste scientifiche di area germanica e nasce con la finalità di diffondere le ultime scoperte scientifiche

⁴²Per queste attività ho fatto riferimento oltre che alle fonti primarie degli *Acta* anche a Goldstine, 1980. Freguglia e Giaquinta, 2016, Giaquinta, 2014a,e Freguglia e Giaquinta, 2020

⁴³vd. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>

di tutta Europa. Una fonte ricchissima e preziosa di testi scientifici moderni in lingua latina. Dal punto di vista della didattica interdisciplinare rappresenta una fonte molto preziosa. Negli *Acta*, apparvero studi importantissimi per lo sviluppo del pensiero scientifico, come quello di Leibniz sui fondamenti del calcolo infinitesimale del 1684.

Negli *Acta Eruditorum* dell'anno successivo sono pubblicate le risoluzioni del problema da parte dei fratelli Bernoulli, una discussione da parte del marchese de l'Hôpital e una nota da parte di Leibniz in cui dichiara di non voler pubblicare la propria dimostrazione in quanto simile a quella dei fratelli Bernoulli, aggiungendo che se fosse stato vivo Huygens e se Hudde avesse continuato ad occuparsi di tali cose e se Newton si fosse scomodato ad interessarsi a tale problema, lo avrebbero già risolto (Bernoulli, 1697b). In realtà, Newton lo aveva già risolto pubblicandolo in forma anonima e senza dimostrazione sulle *Philosophical Transaction* (Freguglia e Giaquinta, 2020, p. 136).

Prima di addentrarci nel cuore della dimostrazione, conviene analizzare inizialmente la struttura dell'articolo: ci si rende conto che risulta abbastanza simile alle pubblicazioni del nostro tempo. È costruito essenzialmente in tre parti. Nella prima parte vengono presentati gli ultimi studi che sono correlati al proprio, citando a proposito il lavoro di Huygens riguardo la curva tautocrona. Infatti, la curva soluzione del problema della brachistocrona, ha la stessa soluzione, ovvero la cicloide, del problema di Huygens. Segue il corpo centrale contenente la dimostrazione ed, infine, la conclusione con apertura a nuovi problemi.

Esplorando più nel dettaglio l'articolo, gli studenti potranno poi apprezzare come, in così poco tempo, sia evoluta la matematica e la sua scrittura, oltre che le rappresentazioni grafiche e la lingua latina stessa che appare via via più semplificata.

Interessanti sono i rimandi ai risultati di Galilei che, a questo punto, risulteranno loro familiari e comprensibili.

Ad esempio, nel seguente brano, Johann evidenzia che l'identità tra brachistocrona e tautocrona si trova solo nelle ipotesi di Galilei:

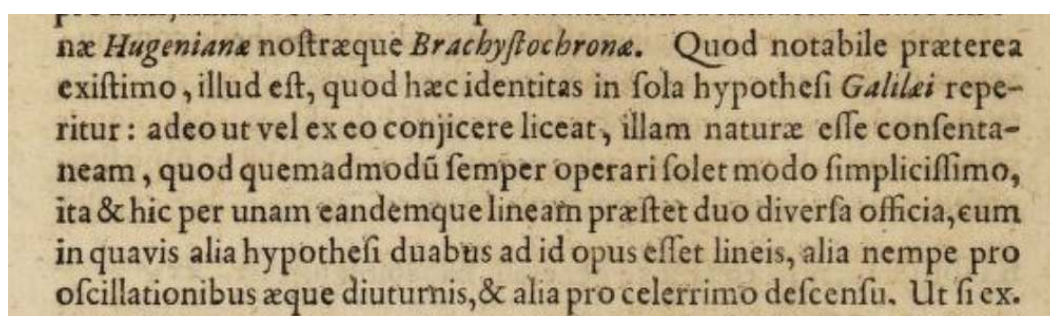


Figura 5.19. Dimostrazione di Johann, *Acta Eruditorum* 1697, p. 209.

[...] da esso, si può inferire che sia conforme alla sua natura, che, come funziona sempre nel modo più semplice, così anche qui con una stessa linea svolge due funzioni diverse, mentre in qualsiasi altra ipotesi per questo occorrerebbero due linee, un'altra cioè per ogni oscillazione lunga, ed un'altra per la discesa più rapida.

Si accompagnano dunque gli studenti nella scoperta della brillante dimostrazione proposta da Johann. Cambia completamente lo scenario rispetto a Galilei, il problema viene approcciato con gli strumenti del calcolo differenziale e non con la geometria classica. Johann adotta un procedimento illustrato secondo una analogia ottica-meccanica tra il problema di minimo tempo di un raggio di luce che si propaga in un mezzo a densità variabile (rifrazione) ed il minimo tempo di percorrenza di un grave vincolato su una curva e soggetto all'azione della gravità; entrambi sono fenomeni a velocità variabili per i quali si ricerca il tempo minimo di percorrenza.

Il principio, dovuto a Fermat⁴⁴, stabilisce che di tutti i possibili cammini che un raggio di luce può percorrere per andare da un punto a un altro, esso segue il cammino che richiede il tempo più breve. Il problema della brachistocrona può essere reso equivalente a quello di determinare il percorso di un raggio di luce attraverso un ipotetico mezzo nel quale la velocità della luce vari in modo consistente alla legge di un grave in caduta. Con questa analogia, Bernoulli fornisce una guida al lettore che già conosce il procedimento di Fermat applicato alla risoluzione del problema della rifrazione.

Per un tale sistema a velocità variabile, dunque, la richiesta di tempo minimo ha come soluzione la legge stabilita indipendentemente da Snell e da Decartes (Giusti, 2007).

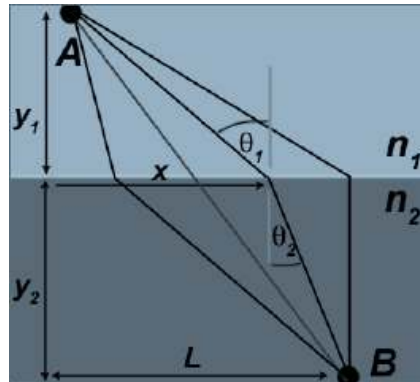


Figura 5.20. legge di Snell

Abbandoniamo per poco il testo di Johann e svolgiamo una piccola digressione per analizzare meglio la legge di Snell⁴⁵ che forse non tutti gli studenti conoscono nel dettaglio. Tale legge mostra come un raggio di luce attraversi l'interfaccia tra due mezzi, con indici di rifrazione n_1 e n_2 , formando angoli, rispettivamente di incidenza e di rifrazione θ_1 e θ_2 rispetto alla normale in ciascun mezzo, che stanno tra loro in una relazione particolare. Come sono dunque collegati θ_1 e θ_2 ?

In riferimento alla figura 5.20, sia $A(x_1; y_1)$ il punto di partenza per raggiungere nel minor tempo il punto $B(x_2; y_2)$. Sia t_1 il tempo in cui viene percorsa la distanza AO tra A e la superficie di separazione e sia t_2 il tempo in cui viene percorsa la distanza OB . Indichiamo poi con v_1 la velocità relativa al tratto AO e v_2 la velocità relativa al tratto OB . Possiamo esprimere la velocità nei mezzi come il rapporto

⁴⁴Principio del minimo tempo impiegato dal raggio nella rifrazione, formalizzato intorno al 1629.

⁴⁵Per la dimostrazione della legge di Snell vd. anche Parthasarathy, 2008 da cui è tratta la figura 5.20.

tra la velocità della luce C e l'indice di rifrazione nel mezzo. Possiamo esprimere il tempo di percorrenza totale nei due mezzi nel seguente modo:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2} = \frac{1}{v_1} \cdot \sqrt{x^2 + (y_1)^2} + \frac{1}{v_2} \cdot \sqrt{(L-x)^2 + (y_2)^2}$$

Il tempo minimo di percorrenza si ottiene per $\frac{dt}{dx} = 0$, ovvero per:

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y_1)^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + (y_2)^2}} \Big|_{x=x_0} = 0$$

e denominato x_0 il valore per il quale si ottiene ciò, si ha :

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (y_1)^2}} = \frac{1}{v_2} \cdot \frac{L-x_0}{\sqrt{(L-x_0)^2 + (y_2)^2}}. \quad (5.53)$$

Si può riconoscere che:

$$\sin \theta_1 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (y_1)^2}} ; \sin \theta_2 = \frac{L-x_0}{\sqrt{(L-x_0)^2 + (y_2)^2}}$$

Dunque, l'equazione 5.53 diventa:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \quad (5.54)$$

Nel caso del raggio luminoso, la velocità può essere espressa come $\frac{n}{c}$, dove n è l'indice di rifrazione, pertanto, la 5.54 può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$

Per gli studenti è l'occasione di apprezzare che tale legge, che vale non solo in campo ottico, è ricavata su percorsi finiti che incontrano una superficie separatrice tra due zone con velocità di propagazione differenti, con la richiesta di minimizzare il tempo di percorrenza.

Ritorniamo ora al nostro problema della brachistocrona per il quale, come vedremo più avanti, essendo un problema di meccanica, al fine di definire la legge di variazione della velocità e quindi impostare la soluzione del problema, Johann applica la legge di caduta di Galilei (vd. paragrafo 5.7.5, Teorema II e corollario II).

L'analogia ottica consisterebbe nel concepire la propagazione di un raggio di luce in un mezzo che non sia omogeneamente denso ma che sia composto di strati orizzontali con densità crescenti a cui siano associate variazioni di velocità proprie della caduta del grave. Dà così inizio alla sua bella dimostrazione con un esperimento concettuale, per facilitare, come si è detto sopra, il lettore cui già sono noti i fenomeni ottici e di rifrazione, per meglio comprendere la sua dimostrazione relativa al grave. Ho avuto modo di constatare nella pratica quanto questa analogia sia efficace da un punto di vista didattico permettendo agli studenti di entrare subito nello spirito della dimostrazione. Procediamo dunque con la lettura del testo originale.

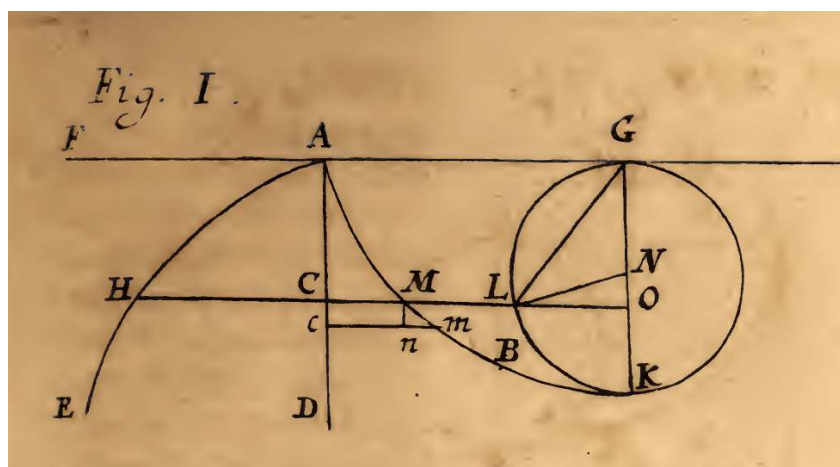


Figura 5.21. Tavola IV, fig 1, Acta Eruditorum 1697.

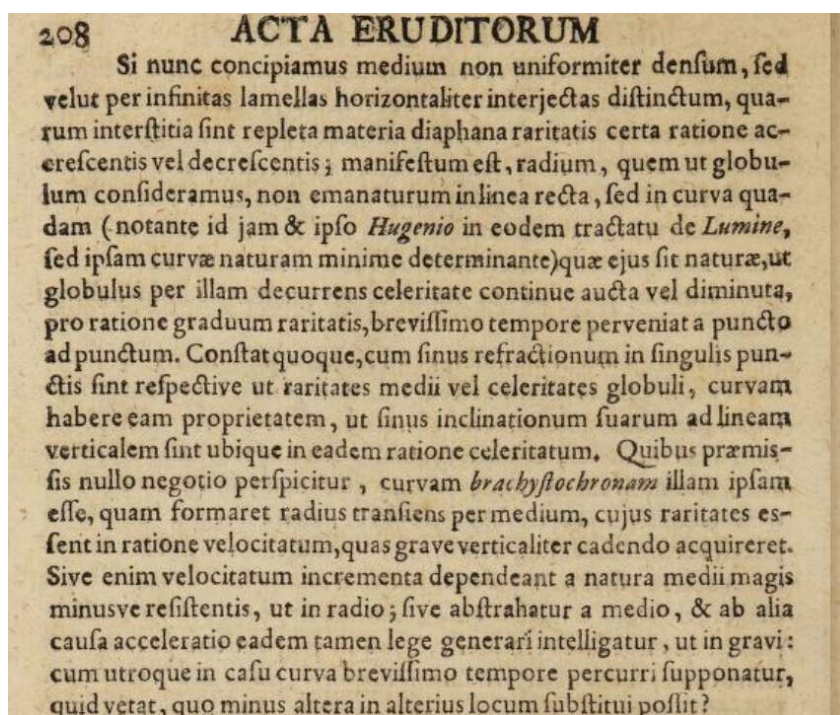


Figura 5.22. Dimostrazione di Johann, Acta Eruditorum 1697, p. 209

Analizziamo ora come Johann costruisce la curva che compie il percorso minimale. Il formalismo matematico adottato da Johann è assolutamente riconoscibile dagli studenti, pertanto, non necessita di una riscrittura in chiave moderna.

Come già analizzato, *AMK* rappresenta la curva di discesa minima. Johann considera il mezzo *FGD* delimitato dalla retta orizzontale *FG*, sulla quale giace il punto radiante *A*. Il suggerimento da fornire agli studenti è quello di interpretare in modo dinamico la figura, infatti, man mano che il grave cade da *A* descrivendo la curva di minor tempo con posizione variabile *M*, la retta *HO* trasla orizzontalmente, separando i due strati di densità differenti, ad es. sopra mezzo meno denso e sotto mezzo più denso. Il punto *A* sta allora nella parte meno densa e *B* sta nella parte più densa. Egli considera la curva *AHE*, di asse *AD*, come curva data nella quale ogni applicata (ordinata) *CH* (con *C* e *H* variabile) di *AC* indica la densità media all'altezza *AC*, oppure le velocità del raggio, o della palla, in *M* (sulla curva *AMB*). Sia dunque, $CH = t$, la velocità o l'inverso della densità del mezzo a distanza *x* da *A*, $GO = AC = x$; $CM = y$ (cioè *x* e *y* sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa del punto *M*; mentre *ACG*, è quello che oggi denominiamo il quarto quadrante). Si noti che l'uso dei nomi delle coordinate è invertito rispetto a quello al quale siamo abituati. L'uso della coordinata verticale come variabile indipendente probabilmente è naturale nel problema della brachistocrona, in quanto le variabili cinematiche, come la velocità del punto che scende lungo la curva dipendono dalla variabile verticale, mentre l'asse orizzontale rappresenta la posizione del punto nel piano, che si può pensare come funzione della variabile verticale. Ecco come Johann introduce i differenziali. Siano poi *c* un punto su *AC* arbitrariamente vicino a *C*, e siano così i differenziali $Cc = Mn = dx$; $nm = dy$; $Mm = ds$; e sia *a* - *constans quaedam ad arbitrium assumpta* - una costante arbitraria.

Il seno dell'angolo di rifrazione, ovvero l'inclinazione della curva rispetto alla verticale; è $\sin \theta_2 = \frac{nm}{Mm} = \frac{dy}{ds}$, in relazione alla figura 5.23.

Tale rapporto, per la legge di Snell, deve essere proporzionale alla velocità del raggio nel punto *C*, ovvero a $CH = t$, perciò avremo: $dy : ds = t : a$ e quindi $dy : t = ds : a$ da cui segue l'equazione $a \cdot dy = t \cdot ds$. Quadrando quest'ultima ed esplicitando il differenziale della curva si arriva a:

$$aady^2 = ttds^2 = ttdx^2 + ttdy^2$$

la quale si riduce all'equazione differenziale:

$$dy = \frac{t \cdot dx}{\sqrt{aa - tt}} \quad (5.55)$$

Il tempo sarà determinato una volta stabilita la velocità della particella in ogni punto lungo il suo percorso.

Continuiamo la lettura del testo di Johann, soffermandoci su un passaggio importante, qui di seguito riportato (fig. 5.24):

In un sol colpo ho risolto due problemi fondamentali, uno ottico e l'altro meccanico, realizzando più di quello che ho chiesto agli altri, ho mostrato che due problemi che provengono da campi diversi della matematica, cioè nonostante sono della stessa natura.

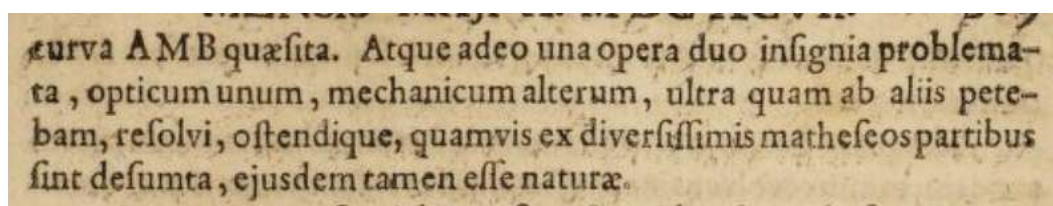


Figura 5.24. Dimostrazione di Johann, Acta Eruditorum 1697, p. 209.

Afferma così che con lo stesso procedimento può risolvere un problema ottico ed uno meccanico. Si sofferma su quello meccanico, trattandosi di un grave, e, pertanto, come si legge nel seguente testo in figura 5.25, utilizza uno dei risultati di Galilei, ovvero che le velocità di corpi che cadono sono proporzionali alle radici quadrate delle altezze di caduta⁴⁷ (vd. paragrafo 5.7.5).

Conviene, ricordare agli studenti che, come abbiamo già sviscerato nel precedente modulo, dalla legge di caduta di Galilei possiamo dedurre:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Dunque, in questo caso, sempre leggendo dal testo originale in figura 5.25, la curva AHE che descrive le velocità del corpo ad ogni istante risulterà essere una parabola e quindi $t^2 = ax$ da cui segue

$$t = \sqrt{ax}.$$

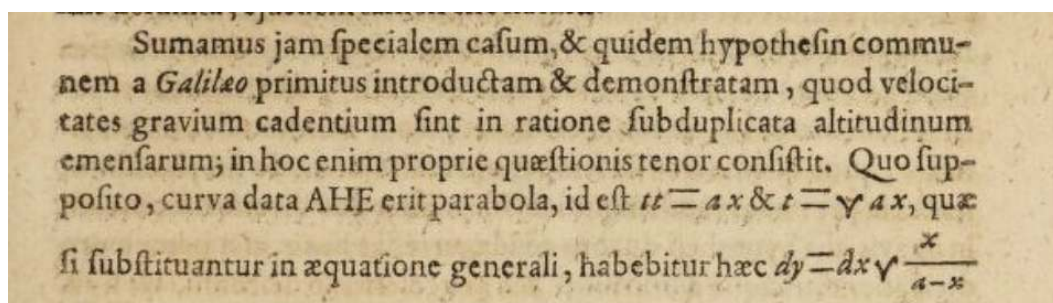


Figura 5.25. Dimostrazione di Johann, Acta Eruditorum 1697, p. 209.

Sostituendo quest'ultima nell'equazione 5.55 prima ricavata, si ottiene la seguente equazione differenziale⁴⁸:

$$dy = dx \cdot \sqrt{\frac{x}{a-x}} \quad (5.56)$$

Da qui conclude che *curvam brachistochronam esse cycloidem vulgarem*, ovvero la brachistocrona è la cicloide ordinaria. E' bene precisare la corrispondenza dei nomi delle variabili dalla scrittura delle legge di caduta della 5.8.1 al testo di Johann: la t presente nel testo di Johann corrisponde alla velocità che indichiamo con v nella

⁴⁷il corollario II teorema II, giornata terza *De motu naturaliter accelerato*.

⁴⁸Per ulteriori approfondimenti vedasi Freguglia e Giaquinta, 2020, p.135.

5.8.1 e la costante a (che è diversa dalla precedente costante a) non è altro che il prodotto $2 \cdot g \cdot h$.

Interpretare la variabile t come velocità è stato contro-intuitivo per gli studenti, che hanno dovuto riorientarsi relativamente alle loro competenza pregresse (vd. paragrafo 3.2.1).

La dimostrazione si conclude dunque mostrando che la curva brachistocrona è un ramo di cicloide ordinaria. Per fare ciò è necessario integrare l'equazione differenziale 5.56.

Infatti, afferma Johann, sempre considerando la figura 5.23, se il cerchio GLK di diametro a ruota sopra AG , iniziando da A , il punto K descrive la cicloide, di equazione differenziale $dy = dx \cdot \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, che si troverà essere la stessa della prima ricavata.

Pone $AC = x$ e $CM = y$, '[...] potest tamen hoc a priori & analytice inveniri sic.'⁴⁹.

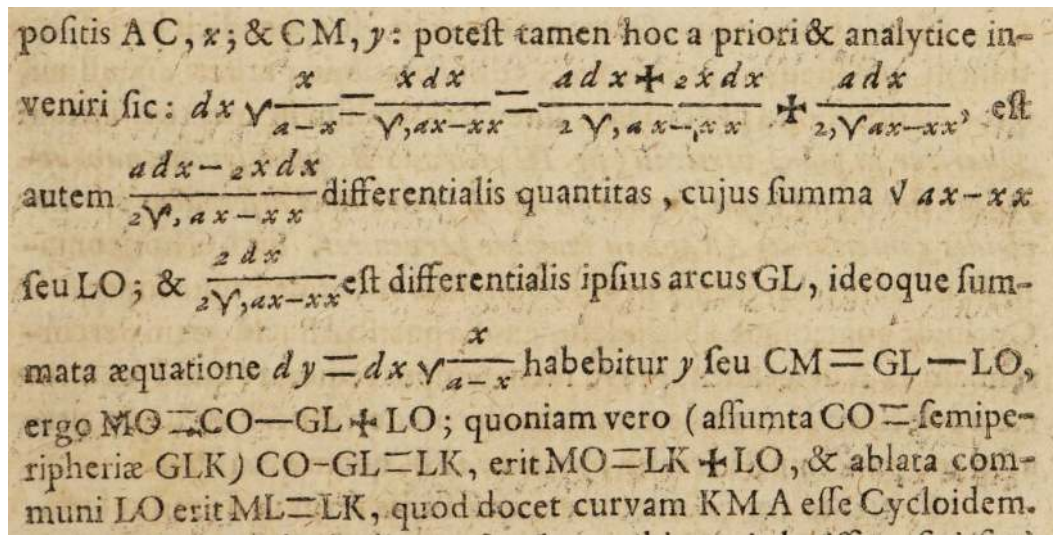


Figura 5.26. Dimostrazione di Johann, Acta Eruditorum 1697, p. 209.

Johann lo dimostra sommando un pezzo alla volta, come si può leggere dal testo in figura 5.26, per arrivare infine alla relazione:

$$\widehat{LK} = ML$$

che caratterizza appunto la cicloide ordinaria⁵⁰.

Ecco come procede. Esprime il differenziale come somma di due addendi:

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{axdx}{2 \cdot \sqrt{ax-xx}} - \frac{adx-2xdx}{2 \cdot \sqrt{ax-xx}} \quad (5.57)$$

Il secondo addendo differenziale ha come somma:

$$\sqrt{ax-xx} \quad (5.58)$$

⁴⁹Ossia, questo può essere trovato a priori e analiticamente come segue

⁵⁰Il perché di tale affermazione viene spiegato più avanti, nel sottoparagrafo di approfondimento, 5.8.1.

che è uguale ad LO . Tale uguaglianza si può far verificare facilmente agli studenti. Infatti, applicando il secondo teorema di Euclide nel triangolo rettangolo GLK si ha che $LO^2 = GO \cdot OK$. Ricordando che $GO = x$, si ottiene $LO^2 = x \cdot (a - x)$, da cui

$$LO = \sqrt{ax - xx} \quad (5.59)$$

Il primo addendo del differenziale, ovvero $\frac{axdx}{2 \cdot \sqrt{ax - xx}}$, invece, è il differenziale dell'arco $\widehat{GL}$. Per la dimostrazione di questa seconda ho fatto riferimento al testo Freguglia e Giaquinta, 2016 e Giaquinta, 2014b. I passaggi sono un po' tecnici, l'importante è che gli studenti comprendano la linea dimostrativa più che il tecnicismo.

Nel triangolo differenziale di lati dGO , dLO e dLG , sempre nella figura 5.23, si ha:

$$d\widehat{LG} = \sqrt{dLO^2 + dOG^2} = \sqrt{d(\sqrt{ax - xx})^2 + dx^2} = \sqrt{\left(\frac{a \cdot dx - 2x \cdot dx}{2 \cdot \sqrt{ax - xx}}\right)^2 + dx^2} \quad (5.60)$$

da cui, svolgendo i calcoli si arriva a:

$$\frac{axdx}{2 \cdot \sqrt{ax - xx}} \quad (5.61)$$

Una volta 'sommata', ovvero integrata, l'equazione 5.57 e avendo posto

$$y = CM$$

possiamo dunque affermare che:

$$y \equiv CM = \widehat{LG} - LO. \quad (5.62)$$

Dal grafico, inoltre, gli studenti potranno ricavare che:

$$MO = CO - CM \quad (5.63)$$

Dalle 5.62 e 5.63 segue che:

$$MO = CO - \widehat{GL} + LO \quad (5.64)$$

Osserviamo che:

$$CO - \widehat{GL} = \text{semicircf}(GLK) - \widehat{LG} = \widehat{LK} \quad (5.65)$$

Segue dunque che:

$$MO = \widehat{LK} + LO \quad (5.66)$$

Eliminando da entrambi i membri di 5.66 a stessa quantità LO , ($\widehat{LK} + LO = CO - \widehat{GL} + LO$) si ottiene:

$$ML = \widehat{LK} \quad (5.67)$$

La 5.67 esprime una delle proprietà della cicloide, dunque si può dedurre che la curva KMA è una cicloide ordinaria.

Si conclude così la prima parte della dimostrazione in cui si stabilisce che guidati dall'analogia ottica-meccanica si è determinato il percorso minimo della brachistocrona che geometricamente è una cicloide.

La seconda parte della dimostrazione condotta da Johann riguarda invece l'unicità della soluzione. Cioè, in riferimento alla figura 5.28, dati i punti A e B c'è sempre una ed una sola cicloide che passa per A e B .

Riprendiamo il testo latino, presentato nella figura 5.27, e guidiamo gli studenti nell'esplorazione.

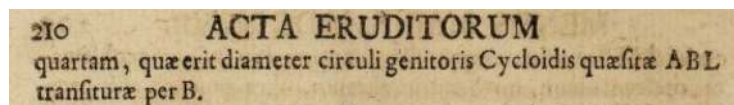
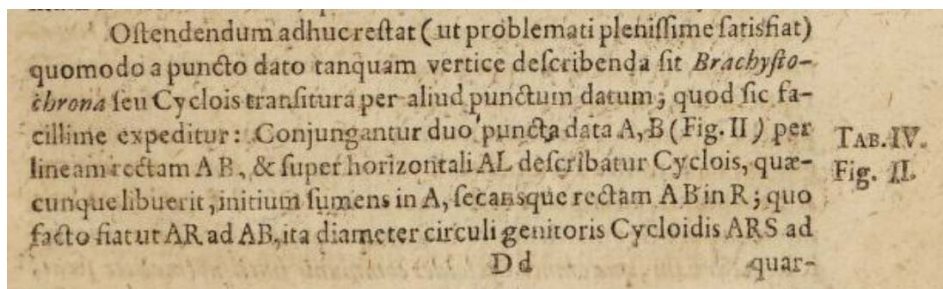


Figura 5.27. Dimostrazione di Johann, Acta Eruditorum 1697.

Resta ancora da mostrare, per soddisfare pienamente il problema, come tracciare una brachistocrona, ossia una cicloide, partendo da un punto dato considerato come vertice e passante per un altro punto dato, il che si risolve così nel modo più semplice: siano uniti da una linea retta i due punti dati A , B , e sull'orizzontale AL si descriva una cicloide qualsiasi a piacere, iniziando da A e intersecando la linea retta AB in R ; fatto ciò, si ha che AR sta ad AB , come il diametro della circonferenza generatrice della cicloide ARS sta alla quarta proporzionale, che sarà il diametro della circonferenza generatrice della cicloide cercata ABL passante per B .

AL è determinato in modo univoco in base all'unicità della quarta proporzionale. Si può dunque costruire la cicloide ARS , assegnare i punti A e B e determinare su questa cicloide il punto R , intersezione con la retta AB . Si determina univocamente il punto L , e quindi la cicloide per A , B e L è unica. Un'analogia dimostrazione si trova in Newton⁵¹.

L'attività si conclude qui ma potrebbe essere interessante proporre un ulteriore approfondimento mirato ad una comprensione più profonda della curva cicloide e delle sue proprietà caratteristiche. Qui di seguito fornisco i dettagli.

⁵¹vd. Freguglia e Giaquinta, 2020, p. 135.

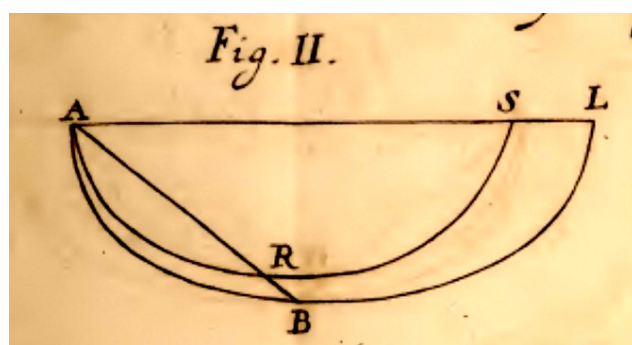


Figura 5.28. Tavola IV, fig II, *Acta Eruditorum* 1697.

Il piacere di sapere: perché $ML = \widehat{LK}$ esprime la cicloide

Questo percorso è mirato ad approfondire le proprietà della cicloide. Le conoscenze pregresse richieste riguardano la goniometria di base. Ho fatto riferimento alla dimostrazione presentata dal prof. Paolo Freguglia durante il corso di dottorato sulla storia del Calcolo delle variazioni⁵².

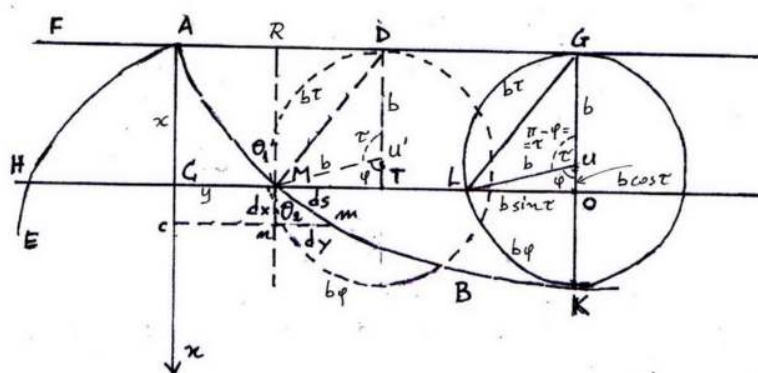


Figura 5.29. Unicità della cicloide risolvete il problema della Brachistocrona

Sia $GK = 2b$ il diametro della circonferenza generatrice GLK , di centro U . Sia L il punto generico sulla circonferenza ed M il punto generico sulla cicloide. Come abbiamo già visto nel paragrafo 5.7.1 l'equazione parametrica della cicloide si ottiene esprimendo le coordinate del suo punto generico M in funzione dell'angolo ϕ .

Vediamo ora come dimostrare che dall'uguaglianza

$$ML = \widehat{LK} \quad (5.68)$$

si ottiene la curva cicloide ABK.

Nel triangolo rettangolo OLU , essendo $\tau = \pi - \phi$, valgono le seguenti relazioni:

$$LO = b \cdot \sin \phi = b \cdot \sin \tau \quad (5.69)$$

e

⁵²vd. nota 46

$$UO = b \cdot \cos \phi = -b \cdot \cos \tau \quad (5.70)$$

Inoltre, nella circonferenza generatrice, GLK , vale che:

$$\widehat{LK} = b \cdot \phi \quad (5.71)$$

da cui, per l'ipotesi 5.68 possiamo affermare che:

$$ML = \widehat{LK} = b \cdot \phi \quad (5.72)$$

$$\widehat{LG} = b \cdot (\pi - \phi) \quad (5.73)$$

Ponendo $\pi - \phi = \tau$, la 5.73 si può riscrivere nel seguente modo:

$$\widehat{LG} = b \cdot \tau \quad (5.74)$$

Osserviamo le relazioni di uguaglianza prodotte dal movimento della circonferenza generatrice:

$$\widehat{DM} = CT = b \cdot \tau \quad (5.75)$$

e

$$CO = b \cdot \pi \quad (5.76)$$

Come si vede dal grafico, $y = CM$ e

$$CO = CM + ML + LO. \quad (5.77)$$

Dunque, per la 5.76, possiamo riscrivere quest'ultima uguaglianza 5.77 nel seguente modo:

$$b \cdot \pi = y + ML + LO \quad (5.78)$$

ovvero:

$$y = b \cdot \pi - ML - LO \quad (5.79)$$

Sostituendo poi, in 5.79 le 5.72 e 5.69, ne segue che:

$$y = b \cdot \pi - b \cdot \phi - b \cdot \sin \tau \quad (5.80)$$

da cui si ha:

$$y = b \cdot (\tau - \sin \tau) \quad (5.81)$$

Analoghe considerazioni possiamo fare per la x . Analizzando il grafico possiamo affermare che:

$$x = AC = GO = GU + UO$$

che, utilizzando la 5.70, possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$x = b - b \cdot \cos \tau$$

ovvero:

$$x = b \cdot (1 - \cos \tau). \quad (5.82)$$

Riconosciamo dunque che le 5.81 e 5.82 insieme rappresentano l'equazione parametrica della cicloide ordinaria, come abbiamo già avuto modo di vedere nel paragrafo 5.7.1.

5.8.2 Attività 2: La sfida di Jakob e la sua proposta di risoluzione

In questa seconda attività viene presentata la dimostrazione del fratello Jakob. Iniziamo col leggere il titolo della sua memoria, pubblicata negli *Acta* del 1697.

Solutio problematum fraternorum, Peculiari programme Cal. Jan 1697 Groningae, nec non Actorum Lips. Mense Junio et Decemb. 1696, et Febr. 1697, propositorum; una cum propositione reciproca aliorum.

Si presenta alla classe l'articolo di Jakob che è strutturato in maniera simile a quello del fratello. Abbiamo già narrato prima un po' di elementi bibliografici relativi ai due fratelli e ricordiamo la loro forte rivalità. A causa di ciò, nella premessa Jakob riferisce che accoglie la sfida solo per via dell'invito ricevuto da Leibniz, affermando inoltre, di aver risolto il problema determinando le curve da lui denominate oligocrone. Si procede così all'analisi più dettagliata del testo, guidando la classe

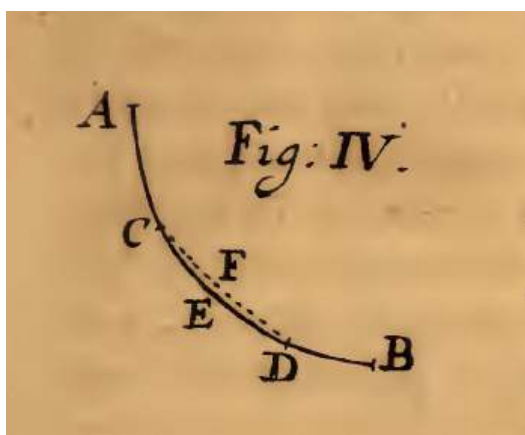


Figura 5.30. Tavola IV, fig IV, Acta Eruditorum 1697.

sia nel riconoscimento del lessico matematico sia nell'interpretazione dei passaggi dimostrativi. Si evidenzia, relativamente al lessico che, per la prima volta compare il termine integrale (in realtà nelle note dell'articolo riportate nella sua *Opera Omnia*). La soluzione presentata da Jakob è di tipo geometrico, e si basa su un approccio variazionale, successivamente sistematizzato da Eulero. Si basa su di un lemma⁵³, a partire dal quale, ricava tutta una serie di proporzioni per arrivare alla tesi.

LEMMA

Sia data una curva ACEDB tale da soddisfare la condizione richiesta, ovvero quella lungo quale un grave discendendo giunga da A a B nel più breve tempo possibile e in quella siano assunti due punti vicini a piacere C e D, dico che la porzione della curva CED è quella di tutte le altre curve terminate nei punti C e D per la quale un grave dopo essere scivolato da A è misurato in un brevissimo tempo. Infatti, se si dica che un'altra [curva] CFD sia misurata in tempi più brevi, ACFDB sarà quindi misurata in un tempo più breve di ACEDB, contrariamente all'ipotesi.

Tale lemma ci assicura che se per una curva assegnata la proprietà di essere suscettibile a massimizzazione o minimizzazione vale globalmente allora questa proprietà vale pure localmente, cioè per un arco qualsiasi di questa curva.

⁵³Tale lemma non ha una portata generale, per molti problemi però, tipo quello della brachistocrona, risulta valido (vd. anche Rogora, 2016).

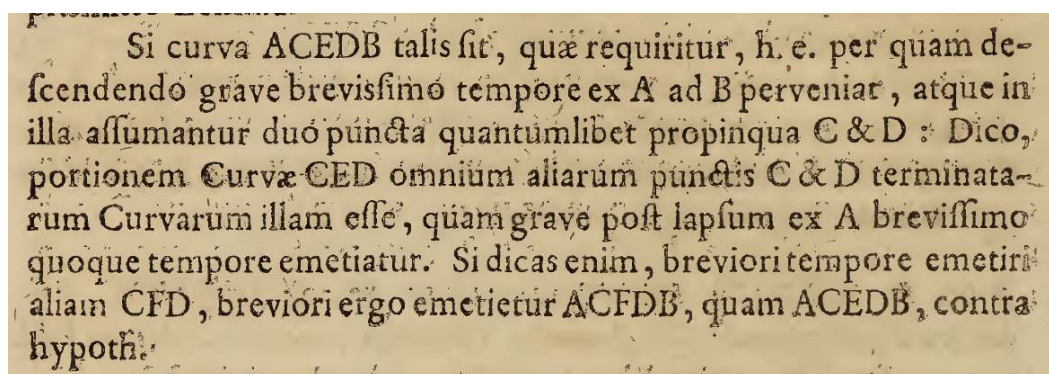


Figura 5.31. Lemma di Jakob, Acta Eruditorum 1697, p. 212.

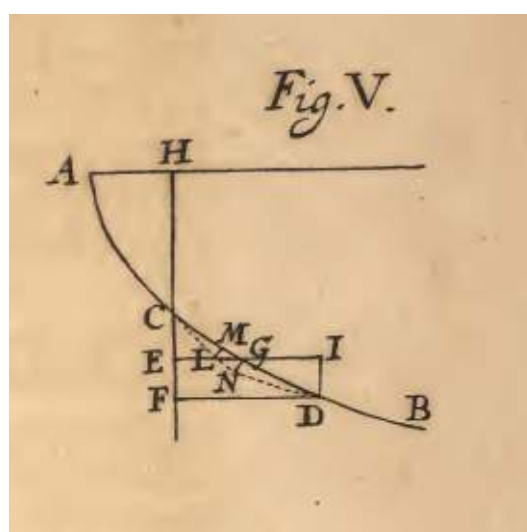


Figura 5.32. Tavola IV, fig V, Acta Eruditorum 1697.

Riferendoci alla figura 5.32, Jakob afferma *esto igitur in plano utcumque ad horizontem inclinato (nec enim verticale sit, necesse est) curva desiderata*⁵⁴ *ACB* per la quale discende il grave da *A* a *B* nel più breve tempo rispetto a qualsiasi altro posto sullo stesso piano e considera *C* e *D*, due punti su essa arbitrariamente vicini (*quantum libet propinqua*, vd. figura 5.31). In questo essere arbitrariamente vicini, c'è la chiave che consente di applicare il nuovo calcolo differenziale.

Riferendoci alla figura 5.32, Jakob conduce la retta orizzontale *AH* e la perpendicolare ad essa, *CH* e dal punto *D* della curva conduce la perpendicolare *DF* a *CH*. Considera, inoltre, *E*, il punto medio di *CF*, e traccia il segmento *EI* in modo da ottenere il parallelogramma *ED* (*EFID*). Si pone il problema di cercare per il punto *G* l'inclinazione reciproca dei tratti della curva *CG* e *GD*, tale che il tempo di discesa lungo *CG* più il tempo di discesa lungo *GD* sia minimo, cioè tale che non sia possibile ridurre ulteriormente il tempo modificando la curva in modo infinitesimo. Il che fa sì che il tempo di discesa attraverso *CG* (che indica con t_{CG}) sommato al

⁵⁴ Ossia, Sia dunque, in un piano in qualche modo inclinato rispetto all'orizzonte (poiché infatti non è necessario che sia verticale), la curva desiderata.

tempo di discesa per GD (che indica con t_{GD}) sia minimo, sempre dopo la caduta da A .

La questione riguarda quindi la tendenza locale della curva CGD a variare nella forma, e si analizzano queste variazioni infinitesime della traiettoria per capire come influenzino il tempo totale di discesa. L'obiettivo finale è appunto minimizzare il tempo di percorrenza lungo i due tratti CG e GD attraverso un'adeguata scelta dell'inclinazione reciproca in G .

Per indagare su questo, considera un punto $L \in EI$, tale che, come si legge nel testo in figura 5.33, GL è *incomparabiliter minor ipsa EG*. Questa condizione è essenziale e facciamo notare che coinvolge i differenziali secondi⁵⁵, essendo GL una differenza tra due differenziali del primo ordine: EG ed EL . Questo aspetto è spiegato, nelle note dello stesso articolo pubblicato nel *Tomus Secundus*, p. 770 (Bernoulli, 1744). Il punto G rappresenta dunque una posizione variabile lungo il tratto infinitesimo CD della curva, in cui Jakob considera una variazione infinitesima della traiettoria. Le sue coordinate, EG e CE , possono essere interpretate come differenziali del primo ordine, ovvero dx e dy . Questa interpretazione è coerente con la costruzione geometrica del problema, che si fonda sull'approccio variazionale: per determinare il profilo della curva che minimizza il tempo di discesa, egli introduce una variazione infinitesima della traiettoria e studia le condizioni affinché la somma dei tempi di percorrenza risulti minima. In questo contesto, la variazione corrisponde a una differenza tra differenziali, ossia un infinitesimo di ordine superiore, rappresentato dal segmento GL .

Tracciate CL e DL , immagina sopra i punti C e D degli elementi di arco LM e GN , con M proiezione di L su CG ed N proiezione di G su LD . Allora, per la natura del minimo della curva e per come si è scelto EG , si avrà che:

$$t_{CL} + t_{LD} = t_{CG} + t_{GD}$$

da cui

$$t_{CG} - t_{CL} = t_{LD} - t_{GD} \quad (5.83)$$

Come notiamo nel testo originale (vd. figura 5.33), il formalismo adottato da Jakob per indicare i tempi di percorrenza dei vari tratti risulta agli studenti familiare, facilitando così la comprensione del testo. Da qui in avanti, gli studenti potranno decodificare, con l'aiuto del docente, la scrittura del tempo relativa alle proporzioni geometriche, non molto distante da quella attuale.

Jakob applica uno dei risultati di Galilei, '*ex nat. desc. grav.*', che gli studenti hanno già esaminato (vd. paragrafo 5.7.5, teorema III, Discorsi e dimostrazioni Giornata III, *De motu naturaliter accelerato*):

Infatti, considera i piani inclinati CG e CL aventi la stessa altezza CE , si ha che:

$$CE : CG = t_{CE} : t_{CG} \quad (5.84)$$

e

$$CE : CL = t_{CE} : t_{CL}$$

⁵⁵vd. anche Giaquinta, 2014a.

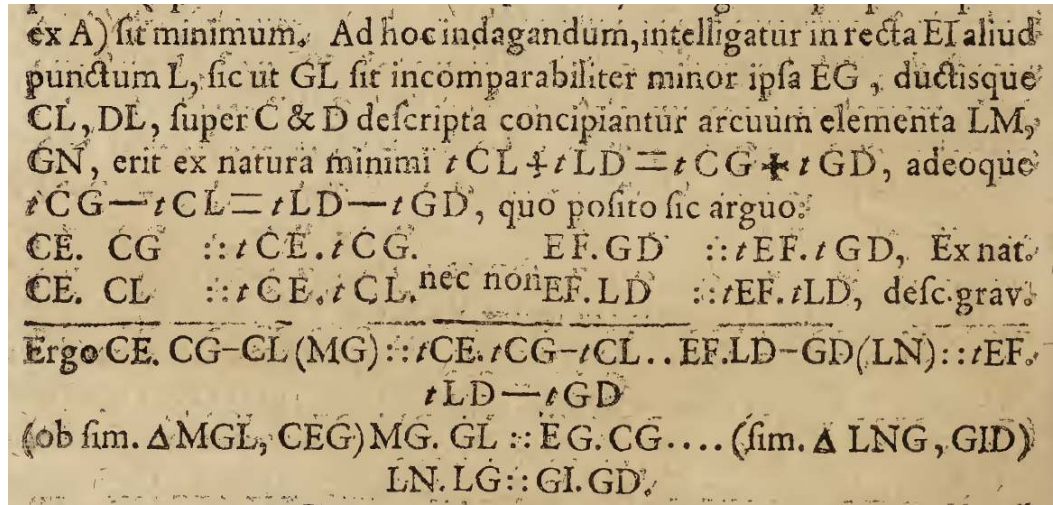


Figura 5.33. Notazione dei tempi da parte di Jakob, *Acta Eruditorum* 1697, p. 212.

da cui, come si osserva nel testo 5.33, si ricava (permutando entrambe e sottraendo una dall'altra e permutando ancora)

$$CE : (CG - CL) = t_{CE} : (t_{CG} - t_{CL}) \quad (5.85)$$

Essendo GL il differenziale di EG e quindi CL approssimativamente uguale a CM possiamo assumere che:

$$CG - CL = CG - CM = MG$$

Dunque la proporzione 5.85 può essere riscritta nel seguente modo⁵⁶:

$$CE : MG = t_{CE} : (t_{CG} - t_{CL}) \quad (5.86)$$

Sempre nel testo si legge che '*ob sim Δ MGL, CEG*' ovvero, dalla similitudine dei triangoli MGL e CEG , si ha:

$$MG : GL = EG : CG \quad (5.87)$$

Moltiplicando membro a membro le 5.86 e 5.87 si ottiene:

$$CE : GL = EG \cdot t_{CE} : CG \cdot (t_{CG} - t_{CL}) \quad (5.88)$$

Di seguito si svolgono analoghe considerazioni per i piani inclinati GD e LD aventi la stessa altezza EF . Applica ancora il risultato di Galilei '*ex nat. desc. grav.*', che gli studenti hanno già esaminato (vd. paragrafo 5.7.5, teorema III, Discorsi e dimostrazioni Giornata III, *De motu naturaliter accelerato*):

$$EF : GD = t_{EF} : t_{GD} \quad (5.89)$$

e

$$EF : LD = t_{EF} : t_{LD}$$

⁵⁶ vd. anche Giaquinta, 2014a, p. 232

da cui si ricava:

$$EF : (LD - GD) = t_{CE} : (t_{LG} - t_{GD}) \quad (5.90)$$

Jakob ora considera l'intervallo EF. Per quanto sopra detto, essendo GL il differenziale di EG, ed essendo GD approssimativamente uguale a ND si può assumere che

$$LD - GD = LD - ND = LN$$

Dunque la proporzione 5.90 può essere riscritta nel seguente modo:

$$EF : LN = t_{CE} : (t_{LG} - t_{GD}) \quad (5.91)$$

Come si legge nel testo 'ob sim $\Delta LNG, GID$ ' e quindi, dalla similitudine dei due triangoli, si ha:

$$LN : GL = GI : GD \quad (5.92)$$

Moltiplicando membro a membro le 5.91 e 5.92 si ha

$$EF : GL = GI \cdot t_{EF} : GD \cdot (t_{LD} - t_{GD})$$

ma essendo $EF = CE$ segue che:

$$CE : GL = GI \cdot t_{EF} : GD \cdot (t_{LD} - t_{GD}) \quad (5.93)$$

Dal confronto di 5.88 ed 5.93 segue che:

$$EG \cdot t_{CE} : CG \cdot (t_{CG} - t_{CL}) = GI \cdot t_{EF} : GD \cdot (t_{LD} - t_{GD})$$

da cui, permutando, si ha

$$EG \cdot t_{CE} : GI \cdot t_{EF} = CG \cdot (t_{CG} - t_{CL}) : GD \cdot (t_{LD} - t_{GD})$$

Tenendo conto della 5.83 si può scrivere la precedente nel seguente modo:

$$EG \cdot t_{CE} : GI \cdot t_{EF} = CG : GD \quad (5.94)$$

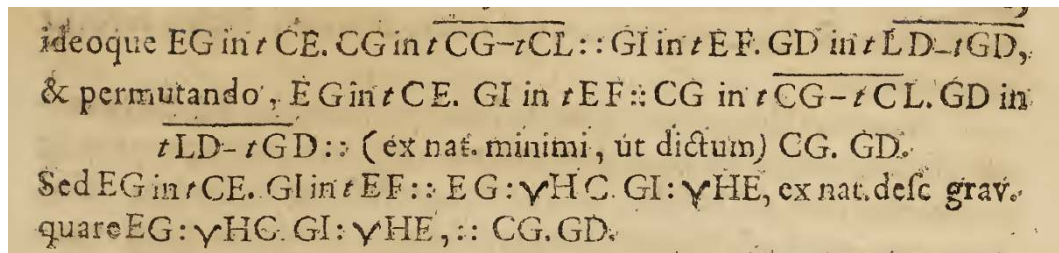


Figura 5.34. Jakob applica la legge di discesa, Acta Eruditorum 1697, p. 213

Come si legge nel testo presente in figura 5.34, Jakob applica la legge di caduta di Galilei:

$$EG \cdot t_{CE} : GI \cdot t_{EF} = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} \quad (5.95)$$

La deduzione indicata nella proporzione 5.95, non è di immediata comprensione. Conviene pertanto ragionare con gli studenti nel seguente modo. Interpretiamo

CE come differenziale di HC . Nel tratto differenziale CE , il moto può essere considerato uniforme e quindi il tempo di percorrenza è inversamente proporzionale alla velocità in C . Tale velocità, d'altra parte, è direttamente proporzionale al tempo di percorrenza del tratto HC , trattandosi ivi di un moto uniformemente accelerato. Tale tempo di percorrenza, a sua volta, per la legge di caduta, risulta direttamente proporzionale a $\sqrt{HC}$. Quindi t_{CE} risulta proporzionale a $\sqrt{HC}$, ovvero $t_{CE} \propto \sqrt{HC}$. Essendo CE il differenziale di HC , si ha che $HC = HE - CE \approx HE$. Dunque possiamo concludere che $t_{CE} \propto \frac{1}{\sqrt{HE}}$. Con analoghe considerazioni si può concludere che $t_{EF} \propto \frac{1}{\sqrt{HC}}$. Infatti, nel tratto differenziale EF il tempo di percorrenza è inversamente proporzionale alla velocità in E che è la stessa di quella in C . Tale velocità è direttamente proporzionale al tempo di percorrenza di HC il quale, a sua volta, per la legge di caduta risulta direttamente proporzionale a $\sqrt{HC}$.

Dal confronto delle 5.94 e 5.95 segue che:

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = CG : GD \quad (5.96)$$

Interessante analizzare quest'ultimo paragrafo riportato nella figura 5.35 in cui si apprezza l'introduzione del nuovo linguaggio e l'uso sapiente dei differenziali e nel quale motiva la necessità del loro utilizzo per la risoluzione del problema: [...]
absque quo non video, quomodo ad solutionem problematis via patuisset..

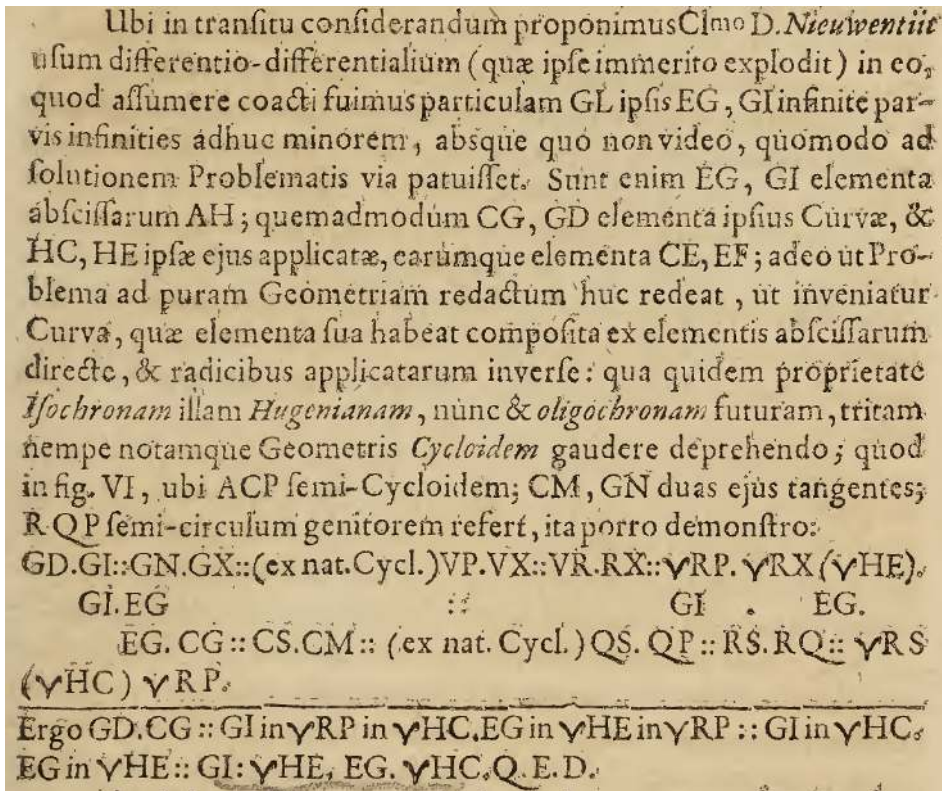


Figura 5.35. Parte finale dimostrazione di Jakob, Acta Eruditorum 1697, p. 213.

Qui, incidentalmente, proponiamo di considerare l'uso dei differenziali del celeberrimo Newton (che lui stesso immeritatamente fa esplodere) in quanto siamo costretti a supporre il tratto GL ancora più piccolo (infinitesimamente) degli stessi tratti EG e GI , già presi piccolissimi; senza il quale non vedo come sarebbe stata aperta la strada alla soluzione del problema. Infatti, EG e GI sono gli elementi (cioè i differenziali) delle ascisse AH , come CG , GD sono gli elementi della curva stessa, e HC , HE sono le sue applicate (ordinate), ed i loro elementi CE , EF ; tanto che qui si trova il problema, ridotto a pura geometria, che si possa determinare una curva per cui gli elementi siano direttamente proporzionali agli elementi di ascissa e inversamente proporzionali alle radici dell'ordinata. Questa proprietà appartiene all'isocrona di Huygens, che è quindi anche l'oligocrona cioè la cicloide ben nota ai Geometri.

A questo punto, resta da verificare che la 5.96 rappresenta effettivamente l'equazione differenziale della cicloide⁵⁷.

Esprimiamola nel seguente modo:

$$CG = GD \cdot \frac{EG}{\sqrt{HC}} \cdot \frac{\sqrt{HE}}{GI}. \quad (5.97)$$

Ponendo poi $CG = ds$, $HC = x$, $EG = dy$, $EC = dx$ e $\frac{GD}{GI} \cdot \sqrt{HE}$ costante⁵⁸ pari a k , e sostituendo nella 5.97 si ha:

$$ds = k \cdot \frac{dy}{\sqrt{x}}$$

Da cui, sostituendo ds con $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, si arriva alla forma differenziale:

$$dy = dx \cdot \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

con $a = k^2$. Il lavoro di Jakob si conclude con la proposta di altri tre problemi di minimo che non fanno parte di questo percorso.

⁵⁷Per questa deduzione mi sono riferita a Freguglia e Giaquinta, 2016.

⁵⁸Il prodotto tra la pendenza locale della curva $\frac{GD}{GI}$ e la velocità del punto (proporzionale a $\sqrt{HE}$) è costante nella brachistocrona in quanto esprime la condizione che lega la variazione della pendenza della curva con la velocità istantanea del punto. In ogni punto della brachistocrona, la pendenza della curva e la velocità istantanea sono legate da un prodotto costante, che esprime la condizione geometrica necessaria affinché il tempo di discesa sia minimo (Courant e John, 1999), e che, come precedentemente detto, discende dal principio di Fermat, (vd. formula 5.54).

5.9 Modulo 3: Novissima dissertatio discipulorum

Il percorso si completa con la produzione di un dibattito scientifico sul problema della brachistocrona da parte degli studenti.

Dopo essersi confrontati coi testi originali in latino ed aver approfondito i temi matematici nei due precedenti moduli, gli studenti vengono suddivisi in gruppi al fine di cimentarsi in un dialogo argomentativo, con l'attenzione di utilizzare il latino nei loro enunciati. La finalità è quella di far emergere competenze argomentative su un tema scientifico, nello specifico la rivoluzione scientifica a cavallo tra il '600 ed il '700, mediante l'utilizzo di testi originali. L'obiettivo didattico è che gli studenti acquisiscano capacità critiche, nell'utilizzo degli strumenti del calcolo differenziale riconoscondone l'origine storica.

Le attività pianificate sono le seguenti:

- Rielaborazione attiva da parte degli studenti
- Il dibattito
- Riflessioni e adattamento del percorso

5.9.1 Attività 1: Rielaborazione attiva da parte degli studenti

Seguendo la metodologia di *cooperative learning*⁵⁹ (vd. Johnson e Holubec, 1986), la classe viene divisa dal docente nei seguenti quattro gruppi, ciascuno dei quali rappresenterà le proprie istanze:

- Gruppo Galilei: Gli studenti dovranno sostenere la posizione di Galileo durante il dibattito. In particolare, "Galileo" dovrà spiegare il suo metodo di passaggio al limite esposto nel teorema III e nello scolio del XXII.
- Gruppo sperimentale: Il gruppo mostra con un modello pratico la validità dei risultati del teorema XXII.
- Gruppo Johann Bernoulli: Il gruppo presenta la sfida (in latino) e apre il dibattito. Presentano la propria dimostrazione evidenziando la necessità dell'uso dei differenziali.
- Gruppo Jakob Bernoulli: Presenta la propria dimostrazione evidenziando la necessità dell'uso dei differenziali in un contesto squisitamente geometrico.
- Gruppo del coro (composto da chi ha posizioni scettiche o da chi ha funzione di commentatore): Nella funzione di scettici, analizzano in modo critico i punti nodali della dimostrazione di Galileo, la validità dell'analogia ottica a cui si appella Johann, per meglio far capire ai lettori il suo procedimento e la validità del Lemma usato da Jakob. Nella funzione di commentatori introducono gli argomenti.

⁵⁹ Diverse sono le tecniche che si possono adottare in questo caso, vd. anche [https://utlc.unige.it/sites/utlc.unige.it/files/pagine/Guida alla metodologia del Cooperative Learning.pdf](https://utlc.unige.it/sites/utlc.unige.it/files/pagine/Guida%20alla%20metodologia%20del%20Cooperative%20Learning.pdf)

Ciascun gruppo lavora sul proprio compito assegnato dal docente, per raggiungere un obiettivo comune indicato dal docente.

Un ruolo particolare ricopre il gruppo del 'coro', in quanto dovendo confutare le varie proposte di dimostrazione presentate, dovranno conoscerne bene i punti di forza e di debolezza. Dunque, a tal fine si distribuiranno negli altri gruppi. Gli studenti, col supporto dei docenti definiscono la scaletta della *dissertatio*.

5.9.2 Attività 2: Il dibattito

Nella conduzione del dibattito, gli enunciati di tutti i teoremi dovrebbero essere espressi in latino, inoltre gli studenti dovrebbero cercare di usare, laddove possibile, il lessico specifico appreso durante lo studio dei testi originali. Sarebbe auspicabile 'teatralizzare' il dibattito prevedendo addirittura una rappresentazione avente come pubblico studenti di altre classi.

5.9.3 Attività 3: Riflessioni e adattamento del percorso

Coerentemente con quanto evidenziato nel paragrafo 3.2, senza avere la pretesa di fare misurazioni sull'efficacia dell'uso della storia ma solo osservando qualitativamente la risposta emozionale e di interesse degli studenti sia durante l'intervento (feedback in itinere) sia attraverso interviste di gradimento e riflessione effettuate al termine del percorso (feedback finale), è utile raccogliere le impressioni degli studenti al fine di poter migliorare la realizzazione del percorso. Un esempio di sondaggio di gradimento da somministrare agli studenti è riportato nelle figure 5.36, 5.37, 5.38 e 5.39.

Sezione 1 di 4

Riscontro sulla sperimentazione latino matematica

B I U  

Gradimento della proposta didattica

Email *

Indirizzo email valido

Questo modulo raccoglie gli indirizzi email. [Modifica impostazioni](#)

Cosa ti ha interessato di questo percorso didattico interdisciplinare? *

Testo risposta lunga

Cosa non ti è piaciuto di questo percorso didattico interdisciplinare? *

Testo risposta lunga

Cosa miglioreresti o cambieresti? *

Testo risposta lunga

Quale altro argomento scientifico ti piacerebbe esplorare attraverso il latino in chiave storica? *

Testo risposta lunga

Figura 5.36. Sessione 1 sondaggio di gradimento

Sezione 2 di 4

Sessione 2: I contenuti

Descrizione (facoltativa)

Quali elementi nuovi, rispetto alla matematica classica, Galilei introduce nella trattazione della cinematica? Fornisci degli esempi. *

Testo risposta lunga

Qual è la tecnica con la quale Galilei risolve il problema della brachistocrona? Risolve tutto con la teoria delle proporzioni? *

Testo risposta lunga

Secondo te perché Galilei non ha risolto correttamente il problema della brachistocrona? *

Testo risposta lunga

Qual è la tecnica che permette invece ai fratelli Bernoulli di arrivare all'equazione corretta, che risolve il problema della Brachistocrona? *

Testo risposta lunga

Figura 5.37. Sessione 2 sondaggio di gradimento

5.8 Proposta di un percorso didattico interdisciplinare tra latino e matematica

Sezione 3 di 4

Sezione 3 - Le soluzioni

Descrizione (facoltativa)

Secondo te, perché si definiscono queste tecniche come non algebriche? *

Testo risposta lunga

Descrivi brevemente l'idea risolutiva di una delle due soluzioni proposta dai fratelli Bernoulli. *

Testo risposta lunga

Che tipo di equazione è quella alla quale pervengono entrambi? Sono equazioni che tu hai già visto nel corso di studi? Commenta la tua risposta. *

Testo risposta lunga

Che tipo di soluzione ti aspetti per questa equazione? *

Testo risposta lunga

Avrai notato che Galilei e i Bernoulli usano degli assi per rappresentare intervalli di tempo e spazio. Sapresti spiegare come li usano ed indicare le differenze? *

Testo risposta lunga

Figura 5.38. Sessione 3 sondaggio di gradimento

Sezione 4 di 4

Sezione 4 - Latino e Matematica

Descrizione (facoltativa)

Quale ritieni che sia il valore della lettura dei testi in lingua originale in ambito matematico? Puoi fornire degli esempi? *

Testo risposta lunga

La riflessione su alcune espressioni o termini latini ti ha condotto a una migliore comprensione in ambito matematico? Puoi fare un esempio? *

Testo risposta lunga

Hai notato delle differenze tra il latino di Galilei e il latino dei fratelli Bernoulli? *

Testo risposta lunga

Figura 5.39. Sessione 4 sondaggio di gradimento

5.10 Riflessioni su una esperienza didattica

5.10.1 La sperimentazione in aula

Nell'a.s. 2023/'24, è stata realizzata una sperimentazione del percorso didattico sopra illustrato, in una classe quinta di liceo matematico. Di seguito, discuto l'implementazione e i risultati.

L'intervento è stato realizzato presso il liceo Plinio Seniore di Roma, integrandosi nella didattica ordinaria delle classi del secondo biennio e dell'ultimo anno del liceo scientifico. Il percorso è stato attuato all'interno della cornice del liceo matematico, il che ha permesso di sfruttare spazi aggiuntivi per l'esplorazione di una didattica innovativa, anche in compresenza con il docente di un'altra disciplina. Inoltre, la disponibilità di un laboratorio dedicato ha reso l'ambiente particolarmente adatto a questo approccio. Questa esperienza mi ha consentito di effettuare alcune osservazioni qualitative relative alla risposta emozionale e all'interesse degli studenti sia durante l'attività (feedback in itinere) sia attraverso interviste di gradimento e riflessione condotte al termine del percorso (feedback finale), senza la pretesa di misurare l'efficacia dell'uso della storia (vd. paragrafo 3.2, Rogers, 1993, Clark, 2019). La didattica laboratoriale in compresenza del docente di latino e del docente di matematica, ha permesso agli studenti di affrontare un percorso di traduzione filologica di alcuni brani dei testi considerati, al fine di condurli ad individuare il linguaggio specifico che, dalla matrice classica, si è distanziato, modificato verso la semplificazione e la duttilità.

Il libro GeoGebra, nella quale sono riportate tutte le attività relative a ciascun modulo, è stato lo strumento che ha contribuito a guidare lo studente nelle sue esplorazioni. Nell'ambito della metodologia di *cooperative learning* si è adottata prevalentemente la tecnica *think - pair - share*⁶⁰. Gli studenti col supporto dei docenti hanno definito la scaletta della *dissertatio* che di seguito riporto:

- Johann Bernoulli: Introduzione del problema della brachistocrona e lancio della sfida da parte del Gruppo.
- Il coro: Che la sfida abbia inizio. E dà la parola a Johann ricordando che dopo esporrà il fratello e Jakob.

Forza la scaletta Galilei intervenendo, come al suo solito, con piglio polemico sostenendo che la sfida non esiste in quanto il problema era stato già risolto da lui 3 decenni prima.

- Galilei: Sostiene di aver risolto per primo il problema e sosterrà la validità delle sue dimostrazioni. Enuncia i risultati su cui appoggerà la dimostrazione del teorema XXII e scolio. Dimostra il teorema XXII, ed espone lo scolio. Supportato dal *gruppo sperimentale* che farà una dimostrazione pratica.
- Il coro-scettici: Ricordandogli che la sua testimonianza è stata ammessa per deferenza benché impossibile, oppone a Galileo i punti deboli del procedimento nella logica dello scolio.
- Il coro: Riferisce che le soluzioni proposte dai fratelli Bernoulli dimostrano che la brachistocrona è un ramo di cicloide. Presentano brevemente la curva, definizione e proprietà. E danno la parola ai fratelli Bernoulli.

⁶⁰vd. nota 59

- Johann Bernoulli: Espone la sua dimostrazione.
- Il coro-scettici : Discute la validità dell'analogia ottica.
- Jakob Bernoulli: Interviene ed espone la sua dimostrazione.
- Il coro-scettici: Discute la validità del lemma.
- Johann Bernoulli: Conclude la sfida affermando che la brachistocrona è dunque un ramo di cicloide ordinaria.
- Galilei: Dichiara di non essere d'accordo e di non credere alle diavolerie moderne.
- Il coro, Johann e Jakob : Mostrano a Galileo che in realtà anche lui ha usato procedimenti di limite nelle sue dimostrazioni (fornendo gli esempi).

La *dissertatio* ha dato modo agli studenti di acquisire consapevolezza critica relativamente al contenuto matematico e al contesto linguistico: immergersi nei personaggi dell'epoca e sostenere le loro tesi ha permesso in maniera naturale a ciascuno degli studenti di entrare in profondità nel problema proposto. In questo contesto, alcuni di loro (il così detto gruppo sperimentale di Galilei) hanno anche realizzato uno studio per la fattibilità di un modellino (vd. figura 5.40) rappresentante il teorema XXII, riuscendo a fornire indicazioni in relazione all'altezza e alla lunghezza dei piani da considerare, in modo da apprezzare ad occhio nudo la differenza dei tempi. Hanno dunque constatato che le dimensioni richieste per apprezzare tale differenza dei tempi erano non gestibili in un contesto scolastico, dunque, hanno realizzato un piccolo modellino del quale hanno effettuato una ripresa video in *slow motion* in modo da poter apprezzare la differenza dei tempi.

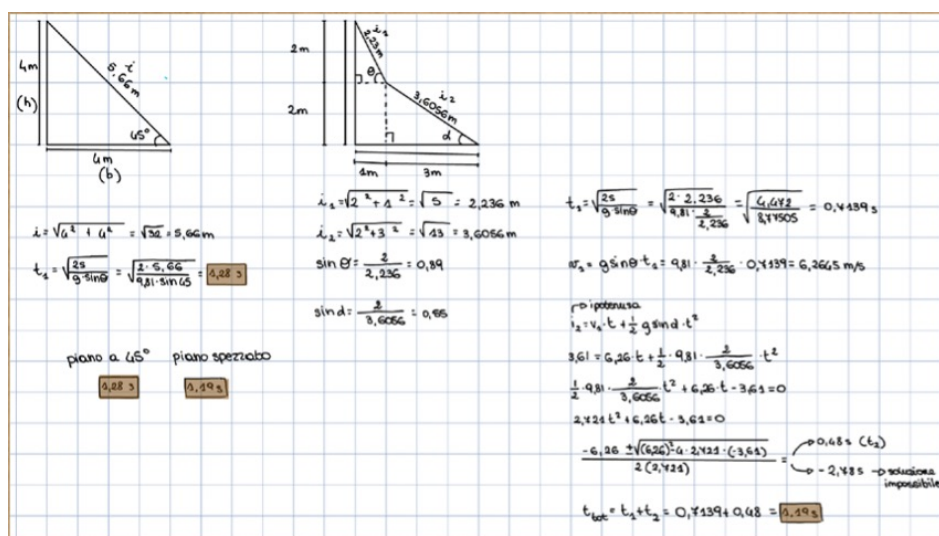


Figura 5.40. Studio di fattibilità del modellino curato dagli studenti

5.10.2 Il ritorno da parte degli studenti

Al termine del percorso è stato somministrato il questionario di gradimento descritto nel paragrafo 5.9.3, dal quale sono emersi l'entusiasmo verso l'attività proposta e molti spunti di riflessione.

Gli studenti hanno compreso quanto il ragionamento matematico, il calcolo differenziale siano intimamente uniti al ragionamento sulla scelta del linguaggio, con cui sono esposti i testi analizzati, ambito più o meno curato della lingua latina, divenuta così strumento di analisi scientifica anch'essa, come si può riscontrare, ad esempio, dalle risposte di una studentessa, riportate nella figura 5.41 .

Sezione 4 - Latino e Matematica

Quale ritieni che sia il valore della lettura dei testi in lingua originale in ambito matematico? Puoi fornire degli esempi? *

Leggere l'originale serve a comprendere meglio il ragionamento dello scienziato (non reinterpretato quindi da matematici e fisici moderni) e si ha un rapporto più diretto con la legge fisica e la dimostrazione. È spesso più complesso comprendere direttamente lo scienziato, ma più stimolante

La riflessione su alcune espressioni o termini latini ti ha condotto a una migliore comprensione in ambito matematico? Puoi fare un esempio? *

Sì, ad esempio i termini subduplus e horizonte

Hai notato delle differenze tra il latino di Galilei e il latino dei fratelli Bernoulli? *

Galilei ha un latino più articolato, ricco di neologismi, e più scolastico e antico; quello dei Bernoulli è molto meno complesso, più "attuale" e scorrevole sintatticamente.

Figura 5.41. Risposte fornite da una studentessa

Gli elementi critici che hanno evidenziato sono legati soprattutto all'organizzazione a volte non semplice. Infatti, non sempre è stato possibile svolgere le lezioni in compresenza e, pertanto, gli studenti si sono trovati in alcuni casi a svolgere traduzioni dal latino non contestualmente alla comprensione dei concetti matematici contenuti nel testo. Questo è un esempio concreto delle difficoltà di tipo organizzativo derivanti dall'essere il LM ancora un progetto sperimentale (vd. paragrafo 1.1).

I risultati di questa prima sperimentazione sono incoraggianti in quanto confermano da un lato la fattibilità del progetto didattico all'interno di una cornice curriculare, qui definita nell'ambito del LM, dall'altro, come si evince dalla risposta degli studenti, indicano la validità didattica di una percorso che promuove la naturale interdisciplinarietà tra latino, matematica e fisica, oltre che l'uso della storia della matematica e delle scienze in generale.

5.10.3 Riproducibilità in aula da parte dei docenti

Alcune considerazioni relative alla portabilità in aula di percorsi di questo tipo.

Da un punto di vista organizzativo, la loro conduzione in aula non richiede particolari stravolgimenti potendo rientrare nella didattica curricolare. Si rivela necessario, però, ad inizio anno scolastico, programmare ed organizzare le attività, ciò in considerazione anche della compresenza dei docenti di matematica e latino che, se non adeguatamente pianificata, può rappresentare un elemento di criticità per la conduzione dei percorsi.

Relativamente ai docenti coinvolti, si richiede innanzitutto una certa sensibilità relativa allo sviluppo del pensiero scientifico, ma non basta solo questo. Non ci si aspetta che il docente di matematica della scuola sia un esperto di storia della matematica e delle scienze, così come il docente di latino non necessariamente dovrà essere un esperto filologo di latino classico e moderno. Tuttavia la selezione degli argomenti che presentino le caratteristiche adeguate alla finalità didattica, nel latino e nella matematica, adeguati al contesto scolastico, e la scelta delle fonti, sono aspetti per i quali è necessario un supporto organizzativo al docente sia sui contenuti sia sugli strumenti da utilizzare in aula.

Relativamente al primo aspetto, sarebbe opportuna una formazione specifica dei docenti con momenti di interdisciplinarietà, attraverso l'analisi di testi, opportunamente selezionati, affrontata sia dal lato del matematico sia da quello del latinista. Ad esempio, la recente introduzione dei 'docenti esperti' e della loro funzione di tutoraggio dei colleghi insegnanti, offre una possibilità per questi momenti di formazione.

La disponibilità di testi *ad hoc* o antologie che presentino una scelta di possibili argomenti da sviluppare in classe, corredati sia delle fonti primarie di riferimento in lingua latina sia di adeguate indicazioni metodologiche per i docenti di matematica e latino, rappresentano in questo contesto un necessario strumento.

Capitolo 6

Proposta di un percorso didattico secondo un approccio storico: Il concetto di covariazione a partire dall'algebra dei segmenti di Cartesio

Il lavoro che di seguito presento risponde all'obiettivo di ricerca OAA1 - PERCORSI A PARTIRE DALLA STORIA, nello scenario d'indagine relativo alla costruzione di percorsi didattici che consentano di ripercorrere alcuni passaggi storici e concettuali fondamentali nella definizione di specifici concetti matematici, anche attraverso l'uso di strumenti innovativi (in questo caso GeoGebra) e secondo un approccio laboratoriale di tipo (*inquiry-based learning*) (vd. paragrafo 1.2).

Questo lavoro prende le mosse da un'attività svolta durante un corso di Storia della Matematica, tenuto dal prof. Enrico Rogora, che ho frequentato nell'ambito della mia formazione di dottorato. In quel contesto è stata proposta la costruzione geometrica, attraverso GeoGebra, dei segmenti prodotto, divisione e radice quadrata secondo il metodo di Cartesio. Questo approccio ha suscitato in me non solo la curiosità tipica di chi si trova di fronte a qualcosa di nuovo, ma anche una consapevolezza immediata del suo potenziale didattico.

Partire da uno spunto storico – in questo caso l'algebra dei segmenti di Cartesio – sposa l'idea che lo studente ripercorra in sé le conquiste dell'umanità, acquisendo una comprensione più profonda dei concetti matematici attraverso lo studio dell'evoluzione del pensiero matematico (vd. paragrafi 3.2.1 e 3.2).

Grazie all'uso di un software di geometria dinamica, è intuitivo – sebbene non banale – visualizzare come varia il segmento risultante dall'operazione di somma o sottrazione di due segmenti, trascinando uno dei segmenti di partenza (vd. paragrafo 4.1). La possibilità poi di ottenere una rappresentazione visiva e dinamica di tale variazione anche per segmento prodotto divisione variando uno dei due segmenti di

partenza apre scenari interessanti per l'insegnamento, offrendo un modo intuitivo per introdurre il concetto di funzione. Tutto ciò può essere potenziato attraverso l'impiego di strumenti didattici innovativi, come il Libro GeoGebra, a supporto della didattica laboratoriale e *inquiry-based*, che favoriscono la traduzione del pensiero in azione e facilita la comunicazione attraverso il registro visivo-dinamico (vd. paragrafo 3.3).

6.1 Contesto

Il concetto di funzione rappresenta uno dei principali ostacoli di carattere epistemologico, riconosciuti sia nella storia della matematica sia nella didattica. La conoscenza di elementi mirati della storia può consentire di affrontarlo con maggiore consapevolezza (Jankvist, 2009).

In questa prospettiva, ho progettato un percorso didattico volto a introdurre il concetto di covariazione, con l'obiettivo di porre le basi per una comprensione più solida e approfondita del concetto di funzione. Il percorso prende avvio da uno spunto storico, che consente di costruire situazioni didattiche (cfr. paragrafo 3.2.1) adeguate al contesto della scuola secondaria di secondo grado.

All'inizio del primo libro della *Géométrie* (Descartes, 1637) Cartesio mostra come, partendo da due segmenti qualsiasi, si possano costruire con riga e compasso altri segmenti che rappresentano non solo la somma e la differenza, ma anche il prodotto e la divisione (vd. figura 6.1). Con una procedura geometrica simile fornisce anche la costruzione del segmento che rappresenta la radice quadrata di un segmento dato (vd. figura 6.2).

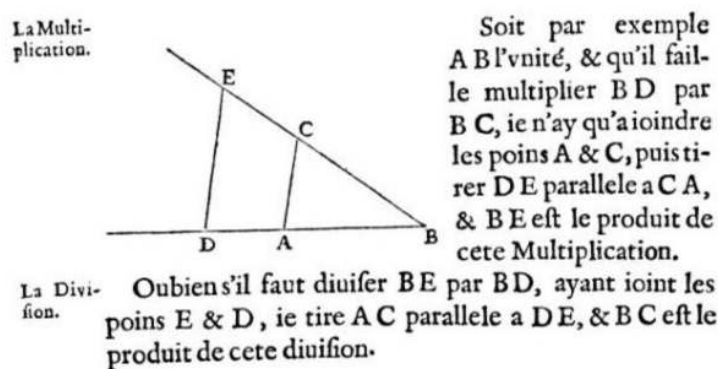


Figura 6.1. La moltiplicazione e la divisione di due segmenti dalla *Géométrie* di Cartesio

Cartesio è il primo nella storia della matematica a pensare al prodotto ed al quoziente come segmenti. Negli *Elementi* di Euclide il prodotto tra due segmenti è un rettangolo, tra tre segmenti un parallelepipedo ma già il prodotto tra quattro segmenti non ha più una interpretazione. Il quoziente tra due segmenti invece è un rapporto, come si legge nel libro V degli *Elementi*. La semplice idea di utilizzare un segmento unità, unita al teorema di Talete, permette di definire prodotto e quoziente di segmenti come un nuovo segmento.

Cartesio rivoluziona l'algebra geometrica del *XVII* secolo. La sua *Geometria* appare in un momento cruciale della transizione dalla matematica antica a quella

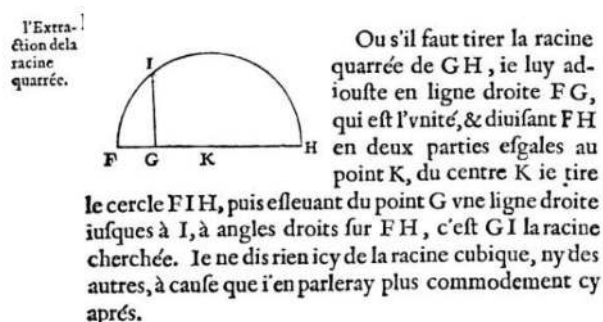


Figura 6.2. La radice quadrata dalla *Géométrie* di Cartesio

moderna. Il recupero dei risultati dell'antica geometria si era diffuso rapidamente grazie alla stampa di traduzioni delle opere di Archimede e di Apollonio. Ciò andò di pari passo con lo sviluppo dell'algebra che risentiva dell'influenza della matematica araba e che aveva prodotto un'importante scuola di algebristi italiani, capaci di determinare formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado. Rilevante anche il contributo di *Viète* che gettò le basi dell'algebra simbolica, recepita e ampliata dallo stesso Cartesio. L'opera di Cartesio può essere considerata il primo testo di matematica moderna, in cui vengono trattate le quantità variabili e da cui prende avvio la geometria analitica. Il successo del calcolo differenziale, elaborato pochi anni dopo da Leibniz e Newton, comportò un rapido assorbimento del punto di vista cartesiano, contribuendo a oscurarne alcuni aspetti che, soprattutto in una prospettiva didattica, risultano particolarmente interessanti e meritevoli di essere messi in luce.

Da quest'algebra dei segmenti, è possibile esprimere il collegamento tra due segmenti variabili «attraverso una serie di costruzioni geometriche elementari che si possono codificare in un'espressione algebrica» (Imperi e Rogora, 2022): dunque, un'equazione corrisponde a una costruzione geometrica e le variabili rappresentano segmenti la cui variazione è vincolata dalla corrispondente costruzione. La variabilità del segmento geometrico, a differenza di quella numerica, permette così di definire un modello intuitivo e trasparente rispetto alla costruzione.

L'idea dalla quale parte Cartesio nella sua algebra è quella di fissare un segmento, indicata col nome *unité*, cui riferire le costruzioni. Il segmento unità è un'innovazione importante, anche se ciò oggi sfugge all'occhio di chi è abituato a lavorare con segmenti unitari. Tale *modus operandi* consente di descrivere un meccanismo di variazione mediante un'algebra senza numeri.

Sempre utilizzando l'algebra dei segmenti, Cartesio spiega come una costruzione geometrica corrisponda alla soluzione di un sistema di equazioni polinomiali. Se il sistema non è determinato e si riconduce ad una sola equazione in due incognite si ottiene il luogo e dunque una curva.

Attraverso costruzioni geometriche elementari codificabili in espressioni algebriche, è possibile collegare due segmenti variabili. L'utilizzo di segmenti e costruzioni con riga e compasso, invece dei numeri e delle operazioni, può aiutare gli studenti a comprendere in modo più concreto la variazione e covariazione continua, facilitando così in seguito l'approccio al concetto di funzione reale e di funzione in generale (Imperi e Rogora, 2022).

L'immagine della funzione (algebraica) che in questo modo si propone è diversa da quella numerica e la sua costruzione è uguale per qualsiasi segmento a differenza di quanto avviene in una definizione numerica. Ciò può aiutare gli studenti a colmare il divario tra *concept definition* (definizione formale) e *concept image* (rappresentazione mentale) (vd. Tall e Vinner, 1981).

L'algebra cartesiana consente dunque di esprimere il 'sintomo' delle curve che rappresentano i grafici di funzioni razionali di x e della radice quadrata di x ; questi grafici corrispondono a luoghi di punti che possono essere costruiti utilizzando riga e compasso. Risulta così più naturale la percezione della continuità nella variazione di una variabile geometrica (un segmento), che operativamente si visualizza facilmente con il trascinamento di un estremo grazie all'uso di un software di geometria dinamica. Decisamente meno intuitiva, invece, risulta la percezione della continuità di una variabile numerica, la cui variazione non si manifesta altrettanto chiaramente. Ad esempio, nell'intervallo da 1 a 4, la variabile numerica deve passare per tutta una serie di valori tra i quali, ad esempio, 2 ; $\log 123$; $\tan 2$; $\frac{11}{5}$; e ; π ; $\frac{11}{3}$ che operativamente presentano un diverso grado di complicazione (Imperi e Rogora, 2022). Ancora meno naturale è la percezione della continuità di una funzione definita con una formula algebrica in un'algebra numerica. Si pensi alla radice quadrata di un numero che si suppone variare con continuità passando per i valori numerici sopra indicati: i numeri non sono tutti uguali rispetto al 'calcolo' della radice mentre i segmenti sono tutti uguali rispetto alla 'costruzione' della radice.

L'utilizzo di GeoGebra consente, dunque, di visualizzare con facilità la covariazione, in quanto l'opportunità di poter modificare dinamicamente i segmenti che rappresentano le variabili non solo permette di osservare la variazione del segmento corrispondente che esprime un'operazione, ma altresì consente di costruire il grafico di una funzione razionale come luogo di una costruzione con riga e compasso (vd. paragrafo 4.1).

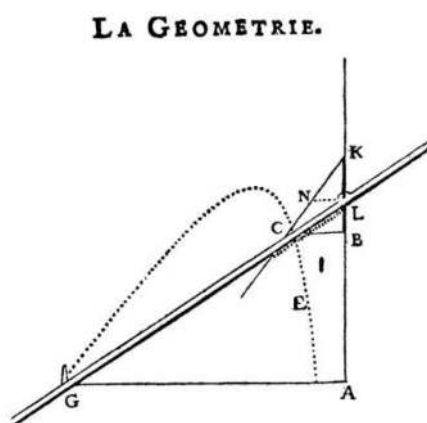


Figura 6.3. Lo strumento di Cartesio

Il movimento è l'ambito in cui si sviluppa un pensiero di carattere 'funzionale'. La variazione con riga e compasso ne è una geniale interpretazione. Legare la variazione di due grandezze, come si intuisce dalla figura 6.3, è quello che permette di creare una dipendenza funzionale, che consente di introdurre il concetto di luogo.

Di seguito, riporto un esempio esplicativo, ovvero la costruzione della covariazione di radice quadrata di un segmento e la visualizzazione della funzione con il comando **Luogo** realizzato con **GeoGebra**.

COSTRUZIONE GEOGEBRA: Si costruisce un segmento AX con A fisso e X mobile sulla retta r . Si costruisce la semicirconferenza di diametro AX . Su tale diametro si individua il segmento unità AU . Si traccia la perpendicolare ad r passante per U . Sia C il punto intersezione di tale perpendicolare con la semicirconferenza. Si traccia la perpendicolare ad r da X . Si traccia la parallela ad r passante per C e sia Y il punto di intersezione tra questa retta e la perpendicolare ad r passante per X . Per il secondo teorema di Euclide, si ottiene che $CU^2 = AU \cdot UX$. Essendo AU il segmento unitario si ottiene che $CU^2 = UX$. Abbiamo dunque rappresentato il quadrato di un segmento con un altro segmento.

Spingendoci oltre, ed utilizzando lo strumento **GeoGebra** possiamo dire che Il luogo di Y rispetto ad X individua la radice di UX .

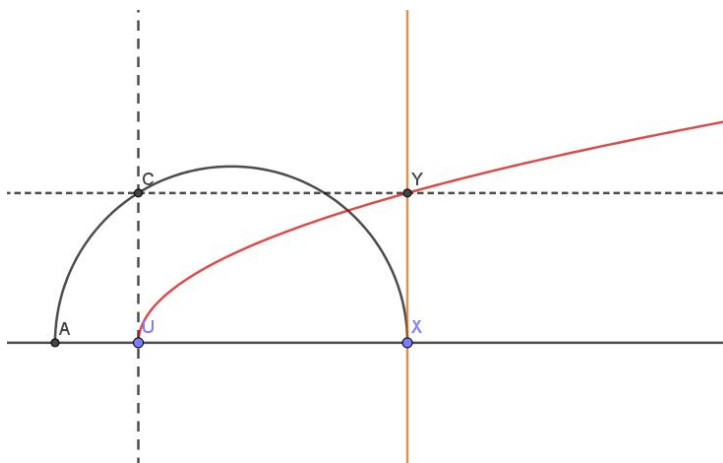


Figura 6.4. La costruzione geometrica della variazione del segmento UX e la covariazione della sua radice quadrata XY , con la generazione del luogo rappresentato dalla curva rossa

6.2 Progettazione del percorso didattico

Il percorso didattico è rivolto a studenti di liceo ed è strutturato in quattro parti:

1. introduzione al concetto di covariazione di punti e segmenti.
2. costruzioni geometriche guidate del segmento che rappresenta le quattro operazioni partendo da segmenti di cui almeno uno variabile.
3. costruzioni di luoghi geometrici attraverso la proiezione del punto di covariazione su una opportuna retta diversa da quella su cui giacciono i segmenti.
4. costruzioni geometriche più articolate e non guidate.

Nella seguente tabella riporto in maniera schematica la definizione del percorso in termini di durata, finalità, obiettivi didattici, prerequisiti, moduli didattici e strumenti utilizzati.

6. Proposta di un percorso didattico secondo un approccio storico: Il concetto di covariazione a partire dall'algebra dei segmenti di Cartesio

Classe	Seconda di liceo scientifico
Finalità	Avvicinare lo studente al concetto di covariazione al fine di giungere al concetto di funzione matematica.
Obiettivo didattico	Far acquisire agli studenti il concetto di covariazione tramite l'algebra di Cartesio e con l'ausilio di software dinamico che consente esplorazioni critiche.
Prerequisiti	Proporzionalità tra grandezze. Teorema di Talete. Similitudine tra triangoli. Concetto di luogo geometrico. Utilizzo base di GeoGebra.
Metodologia	Tecniche di argomentazione. Metodologia laboratoriale. Utilizzo di opportune schede fornite agli studenti.
Durata	10 h, distribuite in quattro percorsi didattici .
Luogo	Laboratorio d'informatica.
Moduli didattici	- Esploriamo con le mani. - Esploriamo con GeoGebra: Covariazione. - Esploriamo con GeoGebra: Algebra dei segmenti. - I luoghi geometrici.
Materiali	Scheda 'diario di bordo' ad uso dello studente. Libro GeoGebra.

6.3 La metodologia

Ispirandomi alla metodologia dell'*Inquiry Based Education* (vd. paragrafo 3.1.2), ho incoraggiato gli studenti ad esplorare il concetto di covariazione, replicando il processo tipico di matematici e scienziati. Gli studenti lavorano in piccoli gruppi all'interno dell'ambiente Libro GeoGebra e sono stimolati a formulare ipotesi e fornire spiegazioni in merito alle esplorazioni proposte sia libere sia guidate. In questo scenario, sono incoraggiati a collegare le nuove scoperte alla conoscenza scientifica pregressa, sostenendo, argomentando e giustificando le proprie congetture, e restituendo un pensiero strutturato durante la comunicazione tra pari.

L'indagine riflessiva, favorisce un apprendimento adattivo, in cui l'esperienza rappresenta il motore per creare connessioni tra sensazioni e idee, stimolando domande scientificamente orientate.

Il lavoro prevede momenti di esplorazione individuale e/o di gruppo, con discussioni durante le quali si richiede di fornire una risposta condivisa nel 'diario di bordo' cartaceo, che rappresenta il prodotto identificativo del gruppo. Ogni studente ha comunque il proprio account GeoGebra, che gli consente di lavorare autonomamente, sia in modalità sincrona sia asincrona, rispondendo alle domande delle attività e tracciando il proprio percorso personale di scoperta. Tuttavia, durante le attività in classe, conviene privilegiare il confronto sui risultati delle esplorazioni (individuali e di gruppo) e sulle loro interpretazioni (vd. paragrafo 4.1), anche grazie alla necessità di negoziare le risposte nel 'diario di bordo'.

6.3.1 Il libro GeoGebra di supporto al percorso didattico

Il percorso di scoperta prevede l'esplorazione individuale di figure dinamiche che però a volte necessitano di indicazioni precise relativamente alle osservazioni da compiere

per poter formulare congetture. Le domande relative alle varie attività sono formulate in modo da favorire un approccio organico alla risoluzione attraverso la ricerca di un contesto più ampio di riferimento, e non di tipo esclusivamente meccanico che dalle premesse porta alle conclusioni attraverso una serie di inferenze (Dunker, 1969). Alcune richieste operative sono particolarmente complesse e richiedono un protocollo di costruzione, altre sono iterative o evoluzioni di costrutti precedenti. È importante, poi, che ciascuno studente possa rielaborare personalmente il processo di scoperta attraverso riflessioni di autovalutazione e revisione/implementazione del percorso.

Il libro GeoGebra si è rivelato un supporto didattico fondamentale per soddisfare tutte queste esigenze, infatti, esso consente non solo la costruzione di figure geometriche dinamiche, sia da finestre vuote che da finestre semistrutturate, ma anche la creazione di sessioni interattive (vd. paragrafo 4.1).

La figura 6.5 riporta la struttura del libro, che può essere consultato e utilizzato collegandosi al sito <https://www.geogebra.org> ed inserendo il codice del libro: DPA8TP6Z.

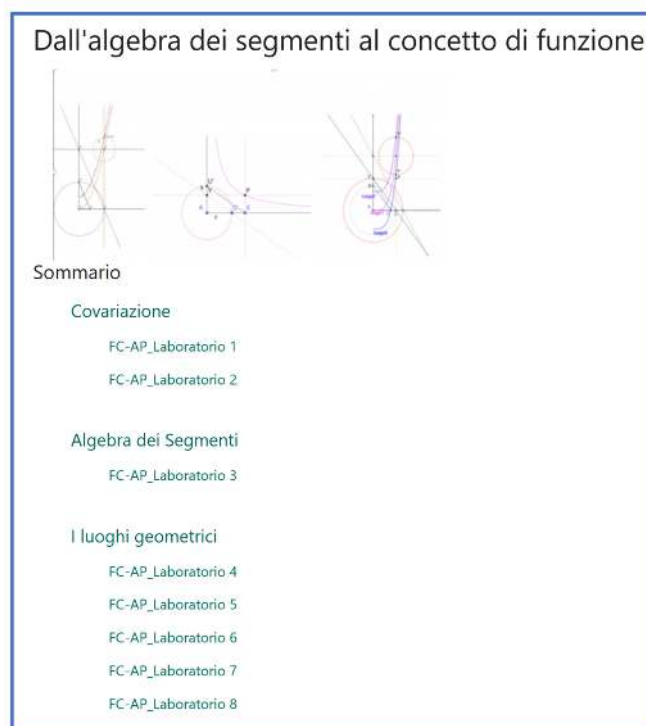


Figura 6.5. Menu iniziale del Libro GeoGebra, disponibile all'indirizzo <https://www.geogebra.org>, con codice del libro: DPA8TP6Z

Le attività definite nel libro GeoGebra permettono sia la costruzione di luoghi geometrici seguendo un protocollo, sia l'esplorazione degli oggetti matematici e la riflessione sulle covariazioni o sugli invarianti, stimolata da domande mirate, come illustrato nella figura 6.6. Tra le attività proposte, ad esempio, è presente la costruzione con riga e compasso del segmento che rappresenta il prodotto, la divisione o la radice, come indicato da Cartesio nella sua *Géométrie*, con in più, grazie alle

6. Proposta di un percorso didattico secondo un approccio storico: Il concetto di covariazione a partire dall'algebra dei segmenti di Cartesio

funzionalità di GeoGebra, la possibilità di visualizzare prima la traccia e poi il luogo, come mostrato nella figura 6.7 per il prodotto. Infine, diverse combinazioni più o meno complesse delle costruzioni suddette consentono di esplorare varie funzioni che possono, con opportuni accorgimenti, essere sovrapposte a quelle ottenute col comando **Inserisci funzione** presente in GeoGebra.

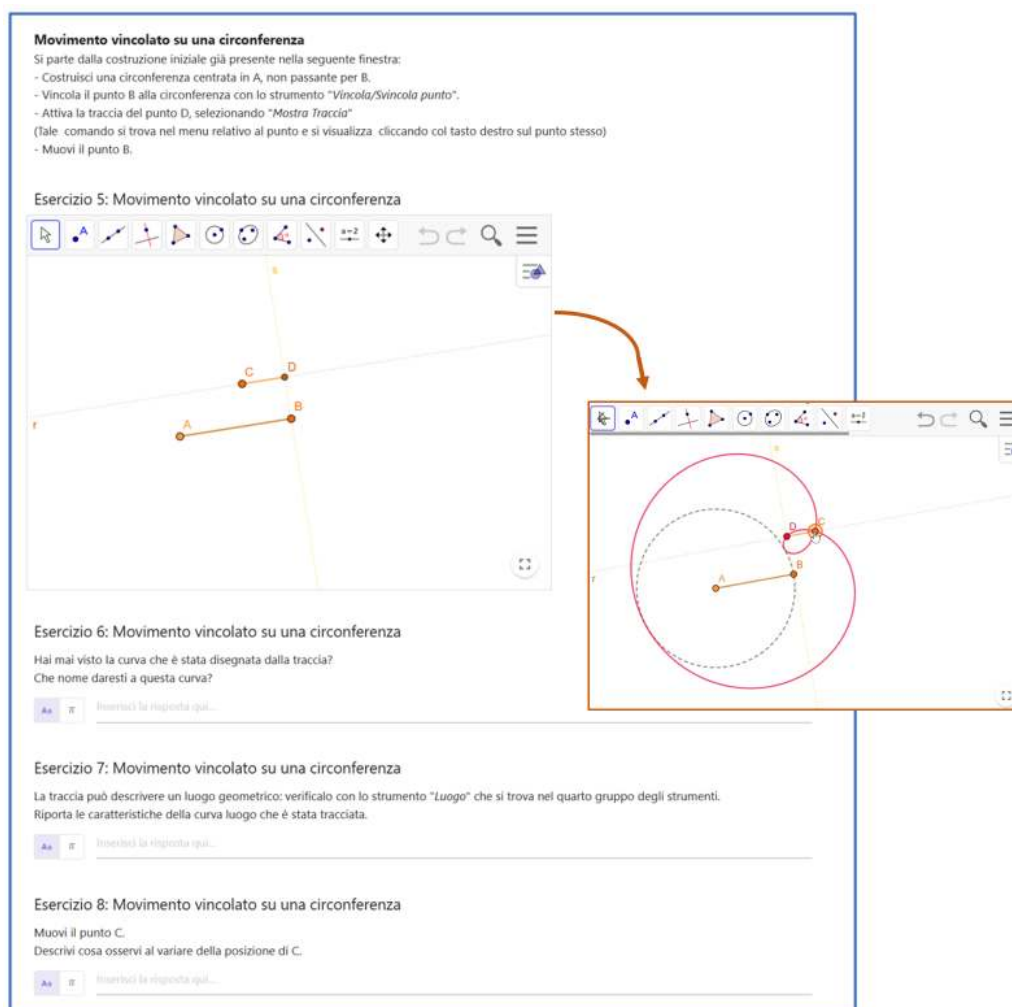


Figura 6.6. Esempio di covariazione tra punto vincolato su una circonferenza e un altro che attraverso un protocollo di costruzione disegna la cardioide. Estratto dal libro GeoGebra

Luogo generato dal prodotto di un segmento fisso con una variabile

Utilizzando l'operazione di prodotto tra due segmenti, di cui uno di lunghezza fissa, è possibile costruire un luogo. Si deve dunque moltiplicare un segmento di misura fissa AB per un segmento di misura variabile pari ad x .

Sia AU il segmento unitario su r (conviene posizionare il punto U a destra del punto X e poi spostarlo lungo r dove si desidera posizionarlo). Sia AX un segmento di misura x variabile. Sia, inoltre, AB un segmento di misura fissa. Considerando l'operazione di prodotto sopra svolta, si tratta di riportare AB sull'asse s perpendicolare ad r in A , nel punto B' . Si procede dunque ad effettuare il prodotto di AB per AX . Dalla proporzione $AB:AY=AU:AX$ si ottiene che $AY=AB \cdot AX$.

Si conducano poi la perpendicolare in x alla semiretta r e la perpendicolare in Y alla retta s . Queste si incontreranno in un punto P . Costruisci il luogo generato da P al variare di X .

Esercizio 41: Luogo generato dal prodotto di un segmento fisso con una variabile

Esercizio 42: Domanda

Qual è il luogo dei punti descritto da P al variare di X ?

Esercizio 43: Domanda 2

Nella finestra precedente, prova adesso a generare il luogo del segmento variabile AX . Riporta la proporzione che hai utilizzato. Confronta con la costruzione precedente utilizzata per generare lo stesso luogo.

Figura 6.7. Costruzione del segmento prodotto col metodo di Cartesio e visualizzazione del Luogo. Estratto dal libro GeoGebra

6.4 I moduli didattici

Nel seguito riporto le attività proposte in ciascun modulo didattico. Ad eccezione di quelle relative al primo modulo, che riguardano costruzioni reali con materiale concreto e coinvolgono non solo la percezione visiva, ma anche il movimento delle mani, richiamando esperienze già interiorizzate dagli studenti (vd. paragrafo 3.1.2), tutte le altre sono presentate attraverso i moduli nel libro *GeoGebra*.

Per ciascuna attività sono indicati i tempi di consegna, tenendo conto della flessibilità della sperimentazione e delle situazioni imprevedibili che possono sorgere durante un percorso di scoperta.

6.4.1 Esploriamo con le mani

L'attività preliminare che ho proposto si svolge usando le dita come punti che possono variare la posizione reciproca e un elastico che rappresenta il segmento variabile tra i due punti. Le figure iniziali e finali possono essere infine fissate e visualizzate con l'aiuto del geopiano. Si prevede che ogni studente costruisca il proprio geopiano di dimensioni (30cm X 30cm) con l'intervento, nell'ambito dell'interdisciplinarietà, del docente di 'storia dell'arte e disegno tecnico', oppure i geopiani vengono consegnati come materiale di lavoro durante l'attività.

Conviene fornire solo qualche indicazione, in modo da favorire da parte degli studenti nell'esplorazione autonoma. Poi, attraverso il confronto con i compagni del proprio gruppo si condividono e concordano le risposte alla domanda presente nella scheda 'diario di bordo'. Le richieste sono le seguenti:

- Osservazioni su come si modifica l'estensione di un segmento (rappresentato da un elastico) al variare di uno dei due estremi.
- Osservazioni su come si modifica l'estensione di un triangolo al variare dell'estensione di uno dei tre lati che si assume come base, mantenendo fissi gli altri due vertici.
- Osservazioni su come si modifica l'estensione di un triangolo al variare dell'estensione dell'altezza relativa ad uno dei tre lati assunto come base, mantenendo fissa tale base.
- Osservazioni su come si modifica l'estensione di un triangolo equilatero.
- Visione del cortometraggio "Geometria senza parole", "Introduction to silent video tasks" (link del video: <https://www.youtube.com/watch?v=qjzKQfhQ8NQ>)
 - Cosa hai osservato? Riporta le tue osservazioni nella scheda "diario di bordo".

6.4.2 Esploriamo con GeoGebra: Covariazione

Dopo la prima fase esplorativa si passa al lavoro sul libro *GeoGebra*.

In questa fase le risposte fornite dagli studenti alle domande proposte vengono raccolte individualmente nell'ambiente personale del libro *GeoGebra*. Solo dopo la discussione all'interno del gruppo, queste risposte vengono sintetizzate in modo

condiviso, sia dal punto di vista del contenuto che del linguaggio, nel 'diario di bordo'.

Di seguito vengono riportate le attività che svolgono gli studenti secondo le modalità sopra descritte. In ciascuna attività, ho fornito semplici suggerimenti come, ad esempio, l'utilità di rappresentare con tratteggi o colori differenti gli elementi di costruzione, per favorire una maggiore comprensione degli effetti della covariazione. Tuttavia, molti accorgimenti sono lasciati alla scoperta e alla condivisione spontanea degli studenti durante le fasi di lavoro.

1. La covariazione

In tale attività l'obiettivo è l'esplorazione di come la variazione di un segmento trascini la variazione di un secondo segmento correlato. Conviene che le attività operative vengano precedute da una fase argomentativa sul significato di covariazione (uso del vocabolario e dibattito sui vari significati trovati) al fine di arrivare ad una definizione condivisa da riportare sul diario di bordo.

- **Costruzione iniziale**

Si parte da un segmento di estremi A (fisso) e B (variabile) e un punto C, non allineato con A e B. Per fissare un punto nel piano si usa la seguente procedura: inserisci un punto A, poi nella barra inserimento scrivi: `ImpFisso(A,true)` che fissa il punto nel piano. Per sbloccare il punto basta scrivere `ImpFisso(A,false)` e il punto torna mobile.

Conduci poi da C la parallela r al segmento AB e da B la perpendicolare s ad AB. Sia D il punto di intersezione della retta r con la retta s , $r \cap s$. Lo strumento GeoGebra per intersecare due curve si trova nel secondo gruppo degli strumenti. Costruisci il segmento CD e varialo variando AB con il trascinamento di B. Chiameremo **covariazione** questo genere di variazione di un segmento rispetto ad un altro, cioè la variazione del segmento costruito è legata tramite una costruzione geometrica alla variazione del segmento di partenza.

- **Movimento vincolato sulla retta**

A partire dalla costruzione iniziale, disegna poi la retta individuata dai punti A e B. Mantieni inizialmente fissa la direzione di tale retta. Per mantenere fissa la direzione, disegna un punto E sul piano e disegna la retta AE.

Vincola il punto B sulla retta AE con lo strumento **vincola/svincola punto** che si trova nel secondo gruppo degli strumenti. Ora il punto B può muoversi in una sola direzione, che è anche quella del segmento AB. Muovi il punto B lungo questa direzione.

- Di conseguenza dove si muove D?
- Ora muovi il punto B non tenendo fissa la direzione della retta AB (svincolando dunque B dalla retta AE). Il punto D riesce a ricoprire completamente il piano?

- **Movimento vincolato sulla circonferenza**

Se B si muovesse su una circonferenza, il punto D come si muoverebbe? Fai un'ipotesi su quale potrebbe essere la forma della curva sulla quale si muove D. Per rispondere a questa domanda può essere utile: costruire una circonferenza centrata in A, vincolare il punto B alla circonferenza con lo strumento **Vincola/Svincola Punto**, e disegna la traccia del punto D, selezionando **Traccia Attiva**.

- Cosa trovate?
- Può' essere un luogo geometrico? Verificate con lo strumento **Luogo**.

- **Covariazione punto medio**

Una semplice covariazione si può realizzare costruendo il punto medio C del segmento AB. La variazione di B trascina quella del punto medio. Vincolando B ad una circonferenza di centro qualsiasi, osserva la covariazione di C al variare di B.

- Cosa produce tale covariazione?
- Adesso vincola il punto variabile alla circonferenza. Nella covariazione punto medio, vincolando il punto B ad una circonferenza NON avente il centro in A, quale curva viene descritta da C?

2. Uscire dalla retta per vedere la covariazione

In tale sezioni gli studenti hanno la possibilità di esplorare una covariazione più complessa con lo strumento di GeoGebra, **Luogo**.

- **Costruzione iniziale**

Per visualizzare la covariazione del punto medio C del segmento AB al variare di B lungo una una semiretta (o una retta, o un segmento), è necessario uscire dal vincolo. La maniera più conveniente si è rivelata quella di trasportare il segmento variabile AC sul segmento BD perpendicolare al punto variabile B 'sopra' la semiretta, e studiare la curva disegnata da D al variare di B. Chiameremo questa curva: curva-luogo della covariazione o, più brevemente, curva-luogo.

- **Costruzione del luogo determinato dalla covariazione del punto medio di un segmento, avente un estremo variabile su una retta**

Seleziona un punto B sulla semiretta r. Costruisci il punto medio C di AB. Traccia la perpendicolare s in B alla semiretta r. Costruisci il segmento BD congruente ad AC, perpendicolare ad r, in uno dei due semipiani a tua scelta in cui il piano è diviso dalla semiretta r, utilizzando lo strumento **Compasso** che trovi nel sesto gruppo degli strumenti. Disegna il luogo tracciato dal punto D con lo strumento **Luogo**. che trovi nel quarto gruppo degli strumenti GeoGebra.

- **Trisezione (in generale, suddivisione in n segmenti congruenti) di un segmento**

Sia r una semiretta di origine A e sia B un punto su di essa. Sia s un'altra semiretta di origine A . Sia D un punto qualunque appartenente ad s . Traccia la circonferenza di centro A e raggio AD che intersechi in E la retta s . Traccia poi la circonferenza di centro E e raggio AD che incontra in F la semiretta s . Congiungi F con B e conduci da D la parallela ad FB , che incontra in G la semiretta r . Per il teorema di Talete si ha che $AG = \frac{1}{3}AB$.

- **Costruzione del luogo determinato dalla covariazione del punto trisecante un segmento, avente un estremo variabile su una retta**

Modifica la costruzione con cui hai rappresentato la covarianza del segmento AC (dove C rappresentava il punto medio del segmento variabile AB) in modo da rappresentare la covarianza di AC quando AC è un terzo di AB . Sia BD il segmento che rappresenta la covariazione.

– Qual è il luogo descritto da D al variare di B ?

- **Duplicazione di un segmento**

Si può usare lo strumento *Compasso* per duplicare (n-plicare) un segmento.

- Come hai usato tale strumento?

- **Costruzione del luogo determinato dalla covariazione del punto che raddoppia un segmento, avente un estremo variabile su una retta**

Modifica la costruzione con cui hai rappresentato la covarianza del segmento AC (dove C rappresentava il punto medio del segmento variabile AB) in modo da rappresentare la covarianza di AC quando AC è il doppio di AB . Sia BD il segmento che rappresenta la covariazione.

– Qual è il luogo descritto da D al variare di B ?

6.4.3 Esploriamo con GeoGebra: Algebra dei Segmenti

Le attività proposte in questo modulo sono dedicate alla costruzione dei segmenti generati dalle quattro operazioni partendo da due segmenti, di cui uno variabile, elaborando la figura che Cartesio presentata nella *Géométrie* (vd. figura 6.1). Le costruzioni propongono covariazioni di segmenti partendo da segmenti variabili, richiamando le attività della prima sezione del Modulo Covariazione del Libro GeoGebra.

Nella seconda sezione 'Uscire dalla retta per vedere la covariazione', lo studente ha riflettuto sulla necessità di 'uscire dalla retta' per poter vedere la covariazione. A questo punto, ci sono le condizioni per poter introdurre operativamente il concetto di luogo geometrico a partire dallo spunto storico (vd. paragrafo 3.2.1). Interpretando la figura 6.3 in maniera dinamica gli studenti potranno scorgere l'idea di covariazione tra segmenti e la conseguente generazione del luogo.

La costruzione iniziale di riferimento che consente di esplorare la covariazione tra segmenti, e che è alla base delle costruzioni successive, è qui descritta di seguito.

Fissiamo un punto A , una semiretta r uscente da A , un punto fisso U sulla semiretta r e uno dei due semipiani un cui la semiretta divide il piano, che indicheremo con il termine 'semipiano superiore'. La scelta del punto fisso U è cruciale per rappresentare la covarianza di figure geometriche variabili. Ogni segmento è congruente ad uno ed un solo segmento AX con X sulla semiretta r . Ogni segmento AX rappresenta quindi un'intera classe di segmenti congruenti, che indicheremo con il simbolo x . La variabile x si può quindi pensare come un segmento AX . La variabilità di x si realizza concretamente trascinando l'estremo X sulla semiretta r . Introduciamo ora delle costruzioni elementari che si possono combinare per costruire una classe ampia di covariazioni. L'uso delle variabili e delle notazioni abbreviate dell'algebra per indicare queste operazioni elementari si rivelerà estremamente utile per esprimere in modo coinciso il meccanismo di costruzione di queste covariazioni. Le operazioni elementari che andiamo a considerare sui segmenti, (somma, sottrazione, prodotto, rapporto e radice) vengono introdotte rispetto a un riferimento (A, r, U) fissato. Si osservi anche che queste sono operazioni in un'algebra di segmenti e non di numeri. Sull'utilità di questo punto di vista, torneremo più avanti. Precisazione che si può saltare in prima lettura per non appesantire le notazioni trascureremo sistematicamente di prestare la dovuta attenzione alla differenza tra segmenti e classi di segmenti congruenti. Per esempio, scriveremo espressioni come $x=CD$ per intendere che x è la classe di segmenti congruenti a CD ovvero che CD è un elemento di tale classe.

Le operazioni sui segmenti di seguito riportate considerano sempre i due segmenti sulla stessa retta. Ciò non ne compromette la generalità, poiché gli studenti saranno stimolati a ricondurre questo caso al contesto generale attraverso il trasporto di segmenti.

I percorsi del modulo Algebra dei Segmenti sono i seguenti:

- **Somma di due segmenti**

La somma di $x=AB$ e $t=AC$ è il segmento $x+t$ che si ottiene costruendo su r il segmento BD congruente ad AC (D dalla parte opposta di A rispetto a B). Costruisci il segmento $x+t=AD$ nella finestra GeoGebra 'Somma di due segmenti'.

Varia la lunghezza del segmento AB o AC e osserva come varia il segmento somma.

- **Differenza tra due segmenti**

La differenza di $x=AB$ con $t=BC$ (con $x>t$) è il segmento $x-t=CD$ che si ottiene costruendo su r il segmento AD congruente a BC . Costruisci il segmento $x-t=CD$ nella finestra GeoGebra 'Differenza tra due segmenti'.

Varia la lunghezza del segmento AB o AC e osserva come varia il segmento differenza .

- **Prodotto di due segmenti**

Siano $x=AB$ e $t=AC$ due segmenti sulla retta r . Costruisci un segmento di misura fissa AU che giace sulla retta r e che sia minore di AC e di AB . Traccia

la retta s ortogonale ad r in A . Costruisci su s i punti B' e C' tali che AB sia congruente ad AB' e AC sia congruente ad AC' . Traccia il segmento UB' . Da C traccia la parallela t a UB' . Sia D' l'intersezione di t con s . Costruisci su r il punto D tale che AD sia congruente ad AD' . Svolgi la costruzione nella finestra GeoGebra 'Costruisci il prodotto'.

- In che proporzione stanno i segmenti AU , AB , AC e AD che intervengono nella costruzione del prodotto? Riporta nel tuo diario di bordo come hai ottenuto la proporzione.
 - Cosa rappresenta AD ?
 - La proporzione del prodotto come lega l'algebra dei segmenti di Cartesio all'algebra dei numeri?
- **Rapporto di due segmenti** Siano $x=AB$ e $t=AC$ due segmenti. Traccia la semiretta s ortogonale ad r in A . Costruisci un segmento di misura fissa AU che giace sulla retta r e che sia minore di AC e di AB . Costruisci su s i punti C' ed U' tali che AC sia congruente ad AC' e AU sia congruente ad AU' . Traccia il segmento BC' . Da U' traccia la parallela t a BC' . Chiama D l'intersezione di t con r . Svolgi la costruzione nella finestra GeoGebra 'Costruisci il rapporto'.
 - In che proporzione stanno i segmenti AU , AB , AC e AD che intervengono nella costruzione del prodotto?
 - Cosa rappresenta AD ?
 - La proporzione del rapporto come lega l'algebra dei segmenti di Cartesio all'algebra dei numeri?
 - **Luogo generato dal prodotto di un segmento fisso con una variabile** Utilizzando l'operazione di prodotto tra due segmenti, di cui uno di lunghezza fissa, è possibile costruire un luogo. Si deve dunque moltiplicare un segmento di misura fissa AB per un segmento di misura variabile pari ad x . Sia AU il segmento unitario fissato su r . Sia AX un segmento di misura x variabile su r . Sia, inoltre, AB un segmento di misura fissa. Considerando l'operazione di prodotto sopra svolta, si tratta di riportare AB sull'asse s perpendicolare ad r in A . Si procede dunque ad effettuare il prodotto di AB per AX . Dalla proporzione $AB' : AY = AU : AX$ si ottiene che $AY = AB \cdot AX$. Si conducano poi la perpendicolare in X alla semiretta r e la perpendicolare in Y alla retta s . Queste si incontreranno in un punto P . Costruisci il luogo generato da P al variare di X .
 - Qual è il luogo dei punti descritto da P al variare di X ?
 - **Luogo generato dal prodotto di due segmenti variabili congruenti** Utilizzando l'operazione di prodotto tra due segmenti è possibile anche costruire il luogo dei punti che genera un'altra curva. In questo caso si devono moltiplicare due segmenti a misura variabile, dunque due segmenti che abbiano la stessa misura pari ad x . Sia AU il segmento unitario su r . Sia AX un

segmento di misura x variabile su r . Considerando l'operazione di prodotto sopra svolta, significa che $AB = AC = AX$.

Si tratta di riportare AX sull'asse s perpendicolare ad r in A . Si procede dunque ad effettuare il prodotto di AX per AX .

Dalla proporzione $AX' : AY = AU : AX$ si ottiene che $AY = AX^2$.

Si conducano poi la perpendicolare in X alla semiretta r e la perpendicolare in Y alla retta s . Queste si incontreranno in un punto P . Costruisci il luogo generato da P al variare di X .

- Riconosci il luogo dei punti descritto da P al variare di X ?
- Riconosci questo prodotto cosa rappresenta nell'algebra dei numeri?

- **Luogo generato dal rapporto di due segmenti di cui uno fisso** Utilizzando l'operazione di rapporto tra due segmenti è possibile costruire il luogo dei punti. In questo caso si deve determinare il rapporto tra due segmenti, di cui uno di lunghezza fissa e l'altro a misura variabile pari ad x . Sia AU il segmento unitario su r . Sia AX un segmento di misura variabile x su r . Considerando l'operazione di rapporto sopra svolta, si riporti sull'asse s perpendicolare ad r in A il segmento unitario AU . Dalla proporzione $AU' : AY = AU : AX$ si ottiene che $AY = \frac{1}{AX}$.

Si conducano poi la perpendicolare in X alla semiretta r e la perpendicolare in Y alla semiretta s . Queste si incontreranno in un punto P . Costruisci il luogo generato da P al variare di X .

- Riconosci il luogo dei punti descritto da P al variare di X ?

6.4.4 I luoghi geometrici

Le attività del terzo Modulo del libro GeoGebra propongono la costruzione di luoghi più articolati, con difficoltà crescente, partendo dagli strumenti creati nel secondo modulo. Prima di affrontare queste attività, gli studenti devono aver consolidato la costruzione con l'algebra dei segmenti per le quattro operazioni e le potenze di un segmento variabile. Il lavoro può essere svolto individualmente o in coppie, senza indicazioni esplicite da parte del docente. In questa fase, gli studenti operano in un contesto didattico che trova un equilibrio tra autonomia e richieste strutturate minime, favorendo la creazione di un ambiente simile a una bottega rinascimentale, in sintonia con quanto riportato nel documento *Matematica 2003* dell'Unione Matematica Italiana (UMI), in cui si afferma:

'L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.'

È questa dunque un'occasione per favorire un apprendimento attivo e collaborativo, dove gli studenti acquisiscono conoscenze attraverso l'esperienza diretta e l'interazione con i compagni e gli insegnanti, similmente a come gli apprendisti

nelle botteghe rinascimentali imparavano osservando e partecipando alle attività dei maestri.

Ho proposto lo svolgimento delle prime tre attività del terzo Modulo in maniera individuale e autonoma da parte degli studenti, mettendo in evidenza che le strategie per raggiungere l'obiettivo possono essere diverse. Successivamente, ho dedicato del tempo al confronto tra pari relativamente alle procedure adottate, in un clima di collaborazione e confronto.

Il modulo si conclude con una serie di attività che, in assenza di indicazioni esplicite, offrono allo studente l'opportunità di rielaborare criticamente i contenuti appresi fino a quel momento. La risoluzione di tali attività, di seguito elencate, sono riportate nel paragrafo 6.5.

1. Dall'informazione relativa a come fare la somma e la differenza tra grandezze disegna il luogo dei punti di $x^2 + 1$.
2. Disegna la Radice quadrata.
3. Disegna x^3 .
4. Disegna il luogo dei punti generato dalla somma degli addendi x^2 , $2x$ e 1 .
5. Ora ti viene chiesto di disegnare il luogo dei punti $(x + 1)^2$. Ti aspetti di trovare la stessa curva?
6. Rappresenta il luogo dei punti determinato da $x^2 + x + 1$.
7. Rappresenta il luogo dei punti determinato dal polinomio $2x^2 + 3x + 1$, dopo averlo espresso come prodotto di due fattori.
8. Rappresenta il luogo dei punti determinato da $x \cdot (x^2 + x + 1)$.
9. Rappresenta il luogo dei punti determinato da $x^4 - 1$ e $x^4 + 1$ nello stesso grafico.
10. Disegna il luogo dei punti generato dalla somma dei luoghi $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x+1}$.
11. Disegna il luogo dei punti $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$.
12. Costruisci un polinomio a tua scelta che sia almeno di terzo grado e che sia costituito da almeno tre fattori.

6.5 Indicazioni operative per la guida alla risoluzione delle proposte didattiche

6.5.1 La somma e la differenza tra due grandezze variabili

La somma e la differenza tra grandezze si ottiene operando con somma e differenza tra segmenti. Se, ad esempio, ad un luogo si vuole sommare algebricamente un segmento (ottenendo dunque una traslazione verticale del luogo di partenza) si procede sommando algebricamente tale segmento al valore Y sulla retta perpendicolare ad OX passante per X ; in tal modo si determina il nuovo valore su tale asse dato dalla somma o differenza tra i due.

Come esempio riportiamo nel segmento $y = \frac{z}{x}$, che al variare di x descrive il luogo $y = \frac{z}{x}$, la somma e la differenza di z .

Con lo strumento **compasso** si riporta nel grafico una circonferenza di raggio pari al valore che si vuole sommare centrata in Y e il punto di intersezione di tale circonferenza con XY individuerà i valori

$$y_{somma} = \frac{z}{x} + z$$

$$y_{differenza} = \frac{z}{x} - z$$

con il relativo luogo. Nel caso considerato z è indipendente da x .

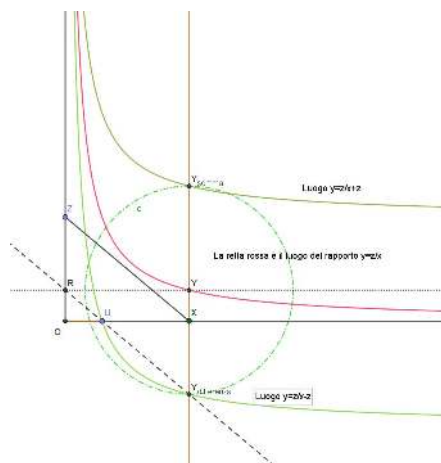


Figura 6.8. La somma e la differenza tra due grandezze

1. Applicazioni dell'algebra dei segmenti di Cartesio

Nella figura 6.9 è illustrata la trasposizione del prodotto tra segmenti secondo Cartesio, che consente di ricondurre l'operazione al contesto più familiare per gli studenti, rappresentato dal primo quadrante.

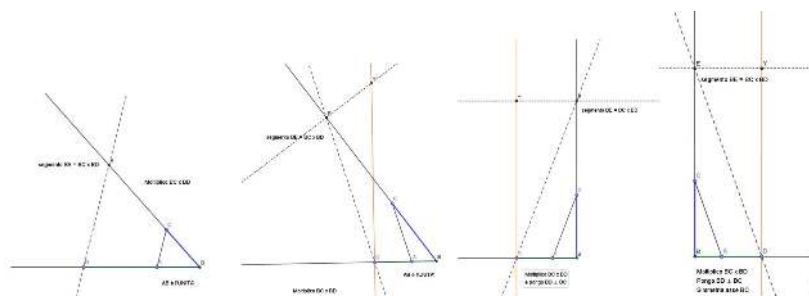


Figura 6.9. Trasposizione del prodotto di Cartesio in riferimento alla figura 6.1

Dati due segmenti AB e AC, si vuole trovare il prodotto tra AC e AB.

Si individuano due semirette aventi la stessa origine e perpendicolari. Il segmento AB si pone nell'asse orizzontale (con A coincidente con l'origine) e AC su quello verticale. Sul segmento orizzontale si fissa il segmento AU pari all'unità (segmento con lunghezza fissata). Si congiungono i punti U e C con il segmento UC. Si traccia la retta parallela a UC e passante per il punto B.

Si indica con P il punto di intersezione di tale parallela con la semiretta AC.

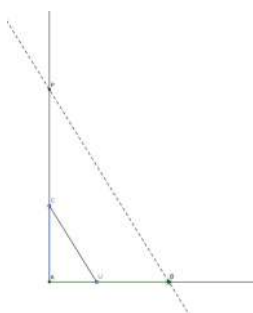


Figura 6.10. Il segmento prodotto

I triangoli PAB e CAU sono simili (teorema di Talete) quindi si può scrivere la relazione:

$$PA : AC = AB : AU$$

Ma $AU = 1$ poiché è il segmento unità. Il segmento $PA = p$ è il prodotto tra le due grandezze:

$$AC \cdot AB = p$$

Al variare di B, tenendo prima fisso il punto C, P descrive un segmento coincidente con il segmento che giace sulla semiretta individuata da AC. Al variare di C, tenendo prima fisso il punto B, P descrive lo stesso segmento.

6.5.2 Il rapporto tra due grandezze (segmenti) AB e AC

Dati due segmenti AB e AC. Si vuole trovare il rapporto tra AC e AB. Si individuano due semirette aventi la stessa origine e perpendicolari. Il segmento AB si pone nell'asse orizzontale (con A coincidente con l'origine) e AC su quello verticale. Sul segmento orizzontale si fissa il segmento AU pari all'unità (segmento con lunghezza fissata). Si congiungono i punti B e C con il segmento BC. Si traccia la retta parallela a CB e passante per il punto U. Si indica con R il punto di intersezione di tale parallela con la semiretta AC.

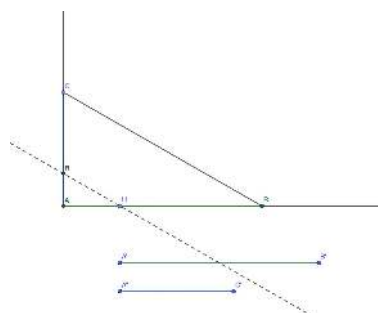


Figura 6.11. Il segmento che rappresenta il rapporto

I triangoli CAB e RAU sono simili (Talete) quindi si può scrivere la relazione:

$$AC : AB = RA : AU$$

Ma $AU = 1$ poiché è il segmento unità. Il segmento $RA = r$ è il rapporto tra le due grandezze:

$$\frac{AC}{AB} = r$$

Anche in questo caso, al variare di B o di C il segmento r descrive un segmento che giace sulla semiretta AC.

Analizziamo dunque alcuni luoghi derivanti dall'algebra dei segmenti. Una modalità che avvicina ancora di più al *piano cartesiano* da noi conosciuto è quella di rivedere le costruzioni che faremo inserendo la variabile x e y sul quadrante individuato dalle due semirette.

Rivediamo le due operazioni di prodotto e di divisione in modo tale da riportare sulla retta, qui denominata regolo di Cartesio, rispettivamente i segmenti di prodotto e di divisione.

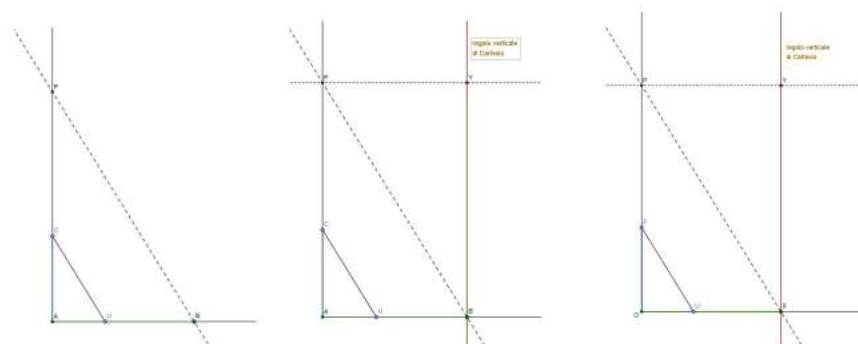


Figura 6.12. Il segmento prodotto riportato sul regolo

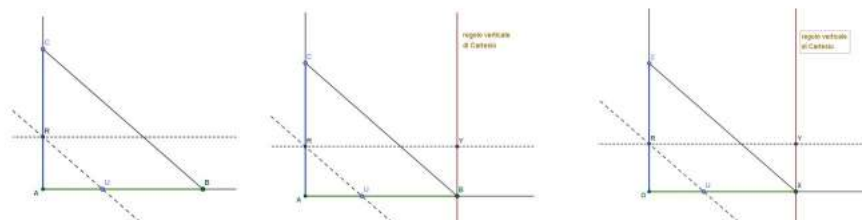


Figura 6.13. Il segmento rapporto riportato sul regolo

6.5.3 Il prodotto di una grandezza fissa e di una grandezza variabile

Utilizzando l'operazione di prodotto tra due segmenti, di cui uno di lunghezza fissa, è possibile costruire il luogo dei punti che genera la funzione lineare. Si deve dunque moltiplicare un segmento di misura fissa AB per un segmento di misura variabile pari ad x . Sia AU il segmento unitario fissato. Sia AX un segmento di misura x variabile. Sia, inoltre, AB un segmento di misura fissa.

Considerando l'operazione di prodotto sopra svolta, si tratta di riportare AB sull'asse verticale. Si procede dunque ad effettuare il prodotto di AB per AX . Dalla proporzione $AB' : AY = AU : AX$ si ottiene che $AY = AB \cdot AX$. Si conducano poi la perpendicolare in X alla semiretta r e la perpendicolare in Y alla retta s . Queste si incontreranno in un punto P . Ebbene il luogo dei punti descritto da P al variare di X genera il grafico cercato.

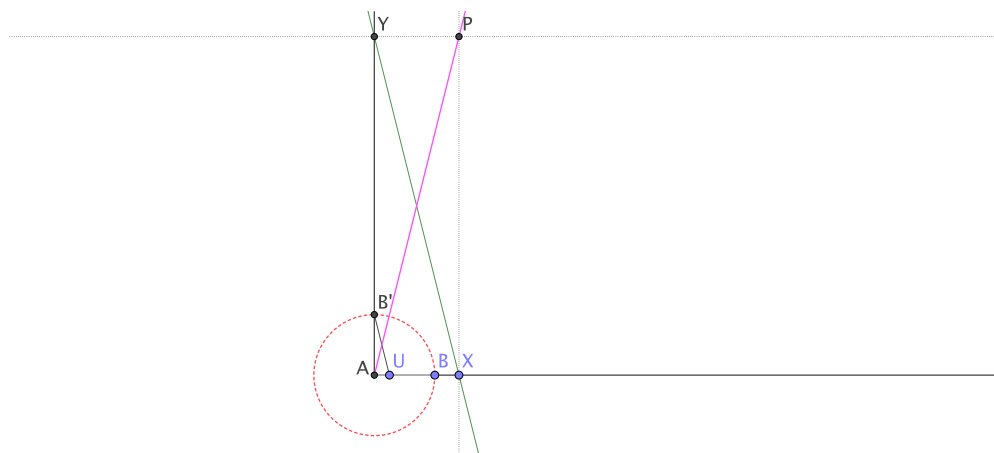


Figura 6.14. Segmento il cui luogo, al variare di x , descrive la funzione lineare

6.5.4 Il prodotto di due grandezze uguali variabili

Utilizzando l'operazione di prodotto tra due segmenti è possibile anche costruire il luogo dei punti che genera un'altra curva. In questo caso si devono moltiplicare due segmenti a misura variabile, dunque due segmenti che abbiano la stessa misura pari ad x . Sia AU il segmento unitario fissato. Sia AX un segmento di misura x variabile. Considerando l'operazione di prodotto sopra svolta, significa che $AB = AC = AX$. Dalla proporzione $AX' : AY = AU : AX$ si ottiene che $AY = AX^2$.

Si conducano poi la perpendicolare in X alla semiretta r e la perpendicolare in Y alla retta s . Queste si incontreranno in un punto P . Ebbene il luogo dei punti descritto da P al variare di X genera il grafico cercato.

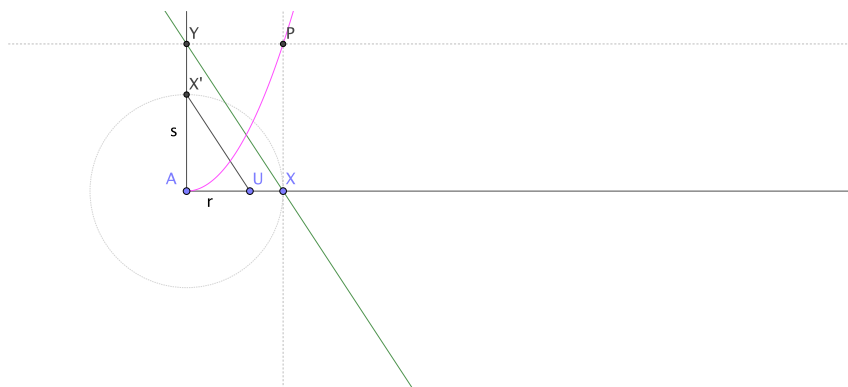


Figura 6.15. Segmento il cui luogo, al variare di x , descrive la funzione quadratica

6.5.5 Il rapporto tra una grandezza fissa ed una grandezza variabile

Utilizzando l'operazione di rapporto tra due segmenti è possibile costruire il luogo dei punti che rappresenta la funzione di proporzionalità inversa. In questo caso si deve determinare il rapporto tra due segmenti, di cui uno di lunghezza fissa pari ad 1 e l'altro a misura variabile pari ad x . Sia AU il segmento unitario fissato. Sia AX un segmento di misura variabile x . Considerando l'operazione di rapporto sopra svolta, si riporti sull'asse verticale il segmento unitario AU . Dalla proporzione $AU' : AY = AU : AX$ si ottiene che $AY = \frac{1}{AX}$.

Si conducano poi la perpendicolare in X alla semiretta r e la perpendicolare in Y alla semiretta s . Queste si incontreranno in un punto P . Ebbene, il luogo dei punti descritto da P al variare di X genera il grafico cercato.

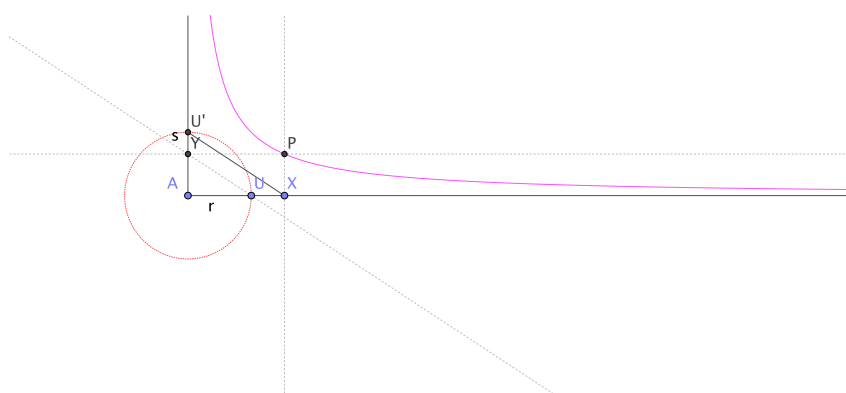


Figura 6.16. Segmento il cui luogo, al variare di x , descrive la funzione di proporzionalità inversa

6.6 L'algebra dei segmenti che costruisce un 'luogo'

In questa sezione fornisco alcuni spunti di possibili procedure per le costruzioni proposte agli studenti nel modulo Luoghi geometrici.

6.6.1 Esplorazioni sul prodotto di grandezze variabili uguali tra loro

Utilizzando l'algebra di Cartesio risolvi le seguenti proposte didattiche.

Percorso 1

Dall'informazione relativa a come viene effettuata la moltiplicazione usando l'algebra di Cartesio $y = z \cdot x$, cioè la moltiplicazione tra due grandezze una indipendente dall'altra, prova a scrivere una moltiplicazione tra due termini uguali e individua il luogo dei punti.

- Scrivi l'impostazione della proporzione relativamente alla figura.

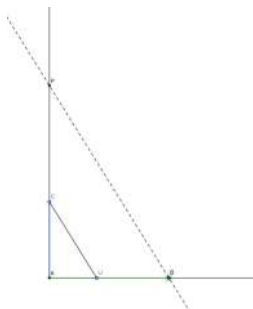


Figura 6.17. Percorso 1 a

- Come scrivi la relazione tra y e x ?
- Come immagini la forma del luogo dei punti di Y al variare di X? (Disegnala e non modificare la prima intuizione.)
- Disegna il procedimento per trovare questa relazione e disegna il luogo dei punti.

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine O. Si fissa il segmento unitario OU sull'asse orizzontale. Si pone il punto X sull'asse orizzontale. Si traccia la perpendicolare a OX passante per X. Si riporta, tramite lo strumento *compasso*, la lunghezza OX sull'asse verticale e si individua il punto di intersezione X' dato dalla circonferenza con l'asse verticale. Si costruisce il segmento UX' e si traccia la retta parallela a UX' passante per X. Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse OX' si indica con il punto P. I triangoli POX e $X'OU$ sono simili (Talete) quindi si può scrivere la relazione:

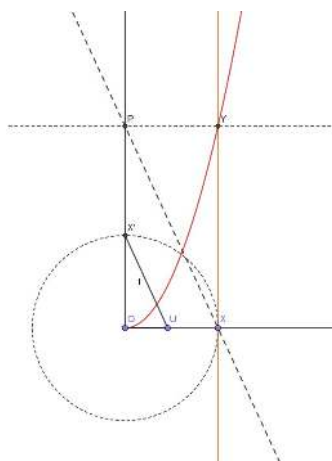


Figura 6.18. Percorso 1 b

$$PO : X'O = OX : OU$$

poiché $X'O = XO = x$

$$p : x = x : 1$$

$$x \cdot x = x^2 = p$$

Si traccia la perpendicolare a OX' passante per P. Si individua il punto Y intersezione di questa retta con la perpendicolare a OX passante per X. Il luogo di Y al variare di X è $y = x^2$.

FINE PROCEDURA.

Percorso 2

Dall'informazione relativa a come fare la somma e la differenza tra grandezze disegna il luogo dei punti di $x^2 + 1$

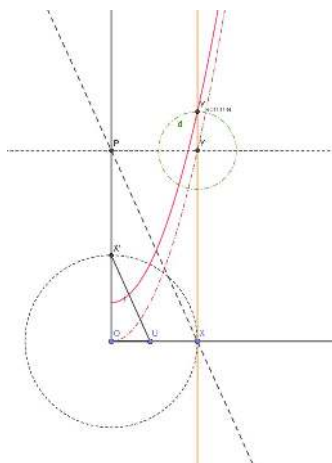


Figura 6.19. Percorso 2 a

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine O . Si fissa il segmento unitario OU sull'asse orizzontale. Si pone il punto X sull'asse orizzontale. Si traccia la perpendicolare a OX passante per X . Si riporta, tramite lo strumento **compasso**, la lunghezza OX sull'asse verticale e si individua il punto di intersezione X' dato dalla circonferenza con l'asse verticale. Si costruisce il segmento UX' e si traccia la retta parallela a UX' passante per X . Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse OX' si indica con il punto P . Si traccia la perpendicolare a OX' passante per P . Si individua il punto Y intersezione di questa retta con la perpendicolare a OX passante per X . Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio OU e centrata in Y : rappresenta l'incremento $+1$. Sia Y_{somma} l'intersezione di questa circonferenza con l'asse XY (verso l'alto) rappresenta il luogo di Y_{somma} al variare di X è $y = x^2 + 1$. Si noti che la procedura per la scrittura $y = x^2 - 1$ è la stessa solo che l'intersezione della circonferenza con XY è verso il basso.

FINE PROCEDURA.

- Descrivi cosa osservi e le differenze col grafico precedente.
- Ora ti verrà chiesto di disegnare il luogo dei punti $(x + 1)^2$. Ti aspetti di trovare la stessa curva?
- Disegna il luogo dei punti $(x + 1)^2$.

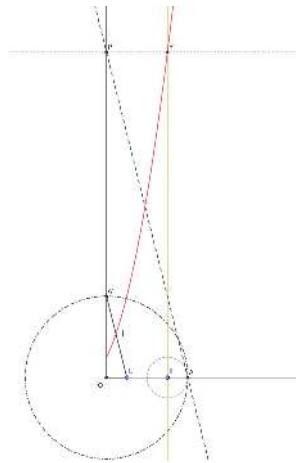


Figura 6.20. Percorso 2 b

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine O . Si fissa il segmento unitario OU sull'asse orizzontale. Si pone il punto X sull'asse orizzontale. Si traccia la perpendicolare a OX passante per X . Si incrementa il valore x di 1, tramite lo strumento **compasso** si costruisce una circonferenza di raggio OU centrata in X e si indica con A il punto di intersezione di tale circonferenza con l'asse orizzontale verso destra (Ovviamente se si volesse trovare il luogo dei punti $(x - 1)^2$ il punto di intersezione scelto dovrebbe essere quello a sinistra). Si riporta, tramite lo strumento **compasso**, la lunghezza $OA = (OX + 1)$ sull'asse verticale e si individua il punto di intersezione A' dato dalla circonferenza con l'asse verticale. Si costruisce

il segmento UA' e si traccia la retta parallela a UA' passante per A. Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse OA' si indica con il punto P. Si traccia la perpendicolare a OA' passante per P. Si individua il punto Y intersezione di questa retta con la perpendicolare a OX passante per X. Il luogo di Y al variare di X è $y = (x + 1)^2$ per l'ormai nota costruzione.

FINE PROCEDURA.

- Confronta gli ultimi due grafici disegnati e commentali.

Percorso 3

Disegna il luogo dei punti generato dalla somma degli addendi x^2 , $2x$ e 1.

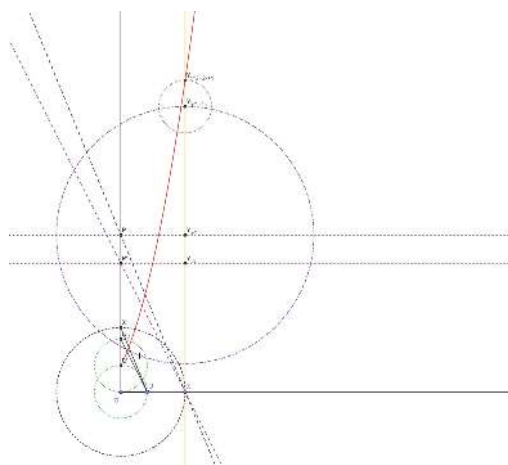


Figura 6.21. Percorso 3

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine O. Si fissa il segmento unitario OU sull'asse orizzontale. Si pone il punto X sull'asse orizzontale. Si traccia la perpendicolare a OX passante per X. Si riporta, tramite lo strumento **compasso**, la lunghezza OX sull'asse verticale e si individua il punto di intersezione X' dato dalla circonferenza con l'asse verticale. Si costruisce il segmento UX' e si traccia la retta parallela a UX' passante per X. Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse OX' si indica con il punto P. Si traccia la perpendicolare a OX' passante per P. Si individua il punto Y_{x^2} intersezione di questa retta con la perpendicolare a OX passante per X. Il luogo di Y_{x^2} al variare di X è $y = x^2$.

Si riporta, tramite lo strumento **compasso**, la lunghezza OU sull'asse verticale e si individua il punto di intersezione U' dato dalla circonferenza con l'asse verticale. Si ripete l'operazione individuando il punto U'_2 . Sull'asse verticale è individuata la lunghezza +2 che verrà moltiplicata con la x . Si costruisce il segmento UU'_2 e si traccia la retta parallela a UU'_2 passante per X. Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse OX' si indica con il punto P'. Si traccia la perpendicolare a OX' passante per P'. Si individua il punto Y_{2x} interse-

zione di questa retta con la perpendicolare a OX passante per X.

Il luogo di Y_{2x} al variare di X è $y = 2x$.

Si sommano i due luoghi ottenuti: tramite lo strumento **compasso** si costruisce una circonferenza di raggio OP' e centro Y_{x^2} e si indica con Y_{x^2+2x} l'intersezione di questa circonferenza con l'asse perpendicolare a OX passante per X (verso l'alto).

(Se si fosse voluta la differenza il punto di intersezione sarebbe dovuto essere quello verso il basso Y_{x^2-2x})) Il luogo di Y_{x^2+2x} al variare di X è $y = x^2 + 2x$.

Per sommare il valore numerico +1 si opera tramite lo strumento **compasso**: si costruisce una circonferenza di raggio OU e centro Y_{x^2+2x} . Si indica il punto di intersezione Y_{x^2+2x+1} di tale circonferenza con l'asse perpendicolare a OX e passante per X verso l'alto. La variazione del punto Y_{x^2+2x+1} rispetto a X è il luogo richiesto. FINE PROCEDURA.

- Confronta gli ultimi due grafici e commenta.

Percorso 4

- Quale strategia pensi di usare per disegnare il luogo x^3 ?
- Disegna il luogo x^3 .

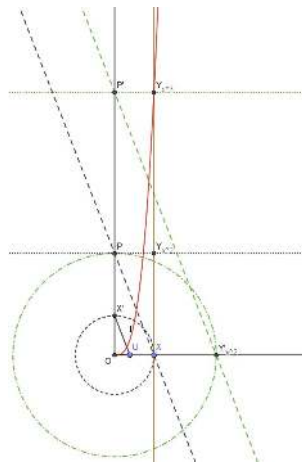


Figura 6.22. Percorso 4

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine O. Si fissa il segmento unitario OU sull'asse orizzontale. Si pone il punto X sull'asse orizzontale. Si traccia la perpendicolare a OX passante per X. Si riporta, tramite lo strumento **compasso**, la lunghezza OX sull'asse verticale e si individua il punto di intersezione X' dato dalla circonferenza con l'asse verticale. Si costruisce il segmento UX' e si traccia la retta parallela a UX' passante per X. Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse OX' si indica con il punto P. Si traccia la perpendicolare

a OX' passante per P . Si individua il punto Y_{x^2} intersezione di questa retta con la perpendicolare a OX passante per X . Il luogo di Y_{x^2} al variare di X è $y = x^2$.

Si riporta il valore Y_{x^2} sull'asse orizzontale tramite lo strumento **compasso**: si costruisce la circonferenza di raggio OP e centro O e si indica con Y'_{x^2} il punto di intersezione di questa circonferenza con l'asse orizzontale. Si traccia la retta parallela a UX' passante per Y_{x^2} . Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse OX' si indica con il punto P' . Si traccia la perpendicolare a OX' passante per P' . Si individua il punto Y_{x^3} intersezione di questa retta con la perpendicolare a OX passante per X . Il luogo di Y_{x^3} al variare di X è $y = x^3$.

FINE PROCEDURA.

6.6.2 Esplorazioni sui polinomi, di secondo grado e superiore

Percorso 5

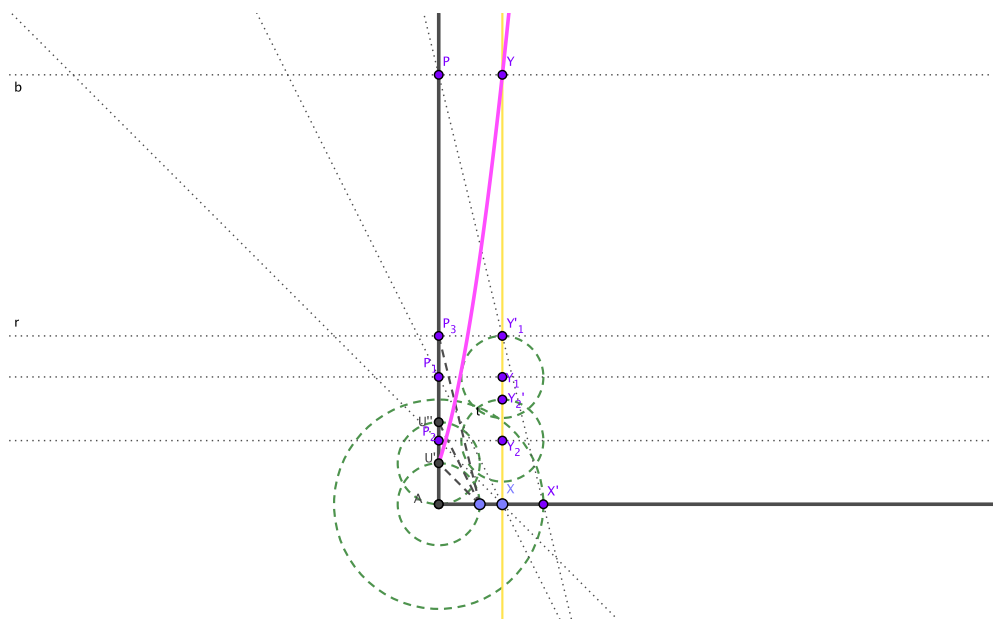
Rappresenta il luogo dei punti determinato dal polinomio $2x^2 + 3x + 1$, dopo averlo espresso come prodotto di due fattori.

- Quali sono in questo caso i due fattori?
- Che tipo di curva ti aspetti?
- Rappresenta il luogo.
- In quale richiesta precedente hai già utilizzato questa procedura?
- Ritieni che il prodotto dei segmenti, secondo Cartesio, sia commutativo?

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si scompone il polinomio in $(2x + 1) \cdot (x + 1)$. Si procede con la rappresentazione del primo fattore $(2x + 1)$. Si individua il quadrante di origine A . Si fissa il segmento unitario AU sull'asse orizzontale. Si pone il punto X sull'asse orizzontale. Si traccia la perpendicolare ad AX passante per X .

Si riporta, tramite lo strumento *compasso*, il segmento unitario sull'asse verticale per due volte e si individua il punto di intersezione U'' dato dalla circonferenza con l'asse verticale, in modo tale che $AU'' = 2$. Si costruisce il segmento UU'' e si conduce la retta parallela ad esso passante per X . Sia P_1 il punto di intersezione di questa parallela con l'asse AU' . Si traccia la perpendicolare in P_1 all'asse AU'' . Si individua il punto Y_1 intersezione di questa retta con la perpendicolare ad AX condotta in X . Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio AU e centrata in Y_1 che permette di determinare l'incremento di 1. Sia Y'_1 l'intersezione di questa circonferenza con l'asse XY_1 che soddisfa tale condizione. Il luogo di Y'_1 al variare di X è proprio $(2x - 1)$. Si prosegue con la rappresentazione del secondo fattore $(x + 1)$.

Si costruisce il segmento UU' e si conduce la retta parallela ad esso passante per X . Sia P_2 il punto di intersezione di questa parallela con l'asse AU' . Si traccia la perpendicolare in P_2 all'asse AU' . Si individua il punto Y_2 intersezione di questa



retta con la perpendicolare ad AX condotta in X . Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio AU e centrata in Y_2 che rappresenta l'incremento di 1. Sia Y'_2 l'intersezione di questa circonferenza con l'asse XY_2 . Il luogo di Y'_2 al variare di X è proprio $(2x - 1)$.

Si prosegue, infine, con il prodotto dei due fattori. Si conduca da Y'_1 la perpendicolare all'asse AU' e sia P_3 il loro punto di intersezione. Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio XY'_2 e centrata in A che incontra in X' l'asse AX . Si costruisce il segmento UP_3 . Si conduce per X' la parallela ad esso che incontrerà l'asse AU' in P . Infine, si conduce da tale punto la perpendicolare all'asse AU' che incontra l'asse XY_1 in Y . Il luogo dei punti di Y . al variare di X è il luogo cercato.

FINE PROCEDURA.

In particolare, per questo percorso, il confronto tra i grafici costruiti dagli studenti, che con molta probabilità avranno operato in maniera differente, consente di argomentare sulla commutatività del prodotto tra segmenti.

Percorso 6

Rappresenta il luogo dei punti determinato da $x^2 + x + 1$.

- Perché non puoi costruire questo polinomio come hai fatto nel caso precedente?
- Come devi operare in questo caso?
- Rappresenta il luogo.

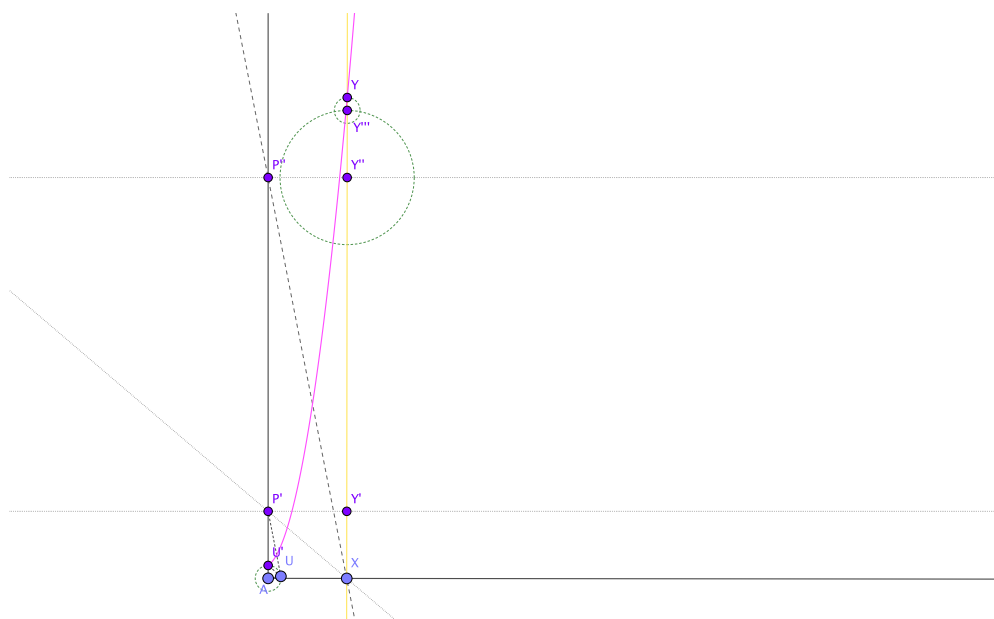


Figura 6.24. Percorso 6

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine A. Si fissa il segmento unitario AU sull'asse orizzontale. Si pone il punto X sull'asse orizzontale. Si traccia la perpendicolare ad AX passante per X.

Si riporta, tramite lo strumento **compasso**, la lunghezza AU sull'asse verticale e si individua il punto di intersezione U' dato dalla circonferenza con l'asse verticale. Si costruisce il segmento UU' e si traccia la retta parallela a UX' passante per X. Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse verticale si indica con il punto P' . Si traccia la perpendicolare a AP' passante per P' . Si individua il punto Y' intersezione di questa retta con la perpendicolare a AX passante per X. Il luogo generato da Y' è la retta $y = x$. Si traccia il segmento UP' e si traccia la retta parallela a UP' passante per X. Il punto di intersezione tra questa parallela e l'asse verticale si indica con il punto P'' . Si traccia la perpendicolare a AP'' passante per P'' . Si individua il punto Y'' intersezione di questa retta con la perpendicolare a AX passante per X. Il luogo generato da Y'' è $y = x^2$.

Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio XY' e centrata in Y'' che rappresenta l'incremento di XY' . Sia Y''' l'intersezione di questa circonferenza con l'asse XY' (verso l'alto). il luogo di Y''' al variare di X è $y = x^2 + x$. Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio AU e centrata in Y''' che rappresenta l'incremento di 1. Sia Y l'intersezione di questa circonferenza con l'asse XY (verso l'alto). Il luogo di Y al variare di X è $y = x^2 + x + 1$.

FINE PROCEDURA.

Percorso 7

Rappresenta il luogo dei punti determinato da $x \cdot (x^2 + x + 1)$.

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si costruisce il polinomio $(x^2 + x + 1)$ così come descritto nel percorso 6. Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza

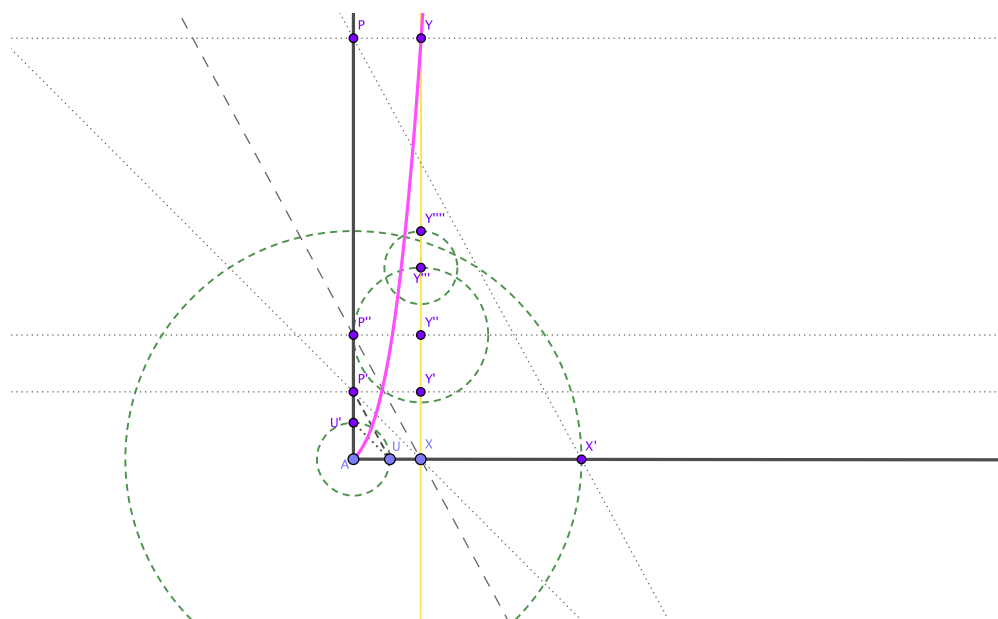


Figura 6.25. Percorso 7

di raggio XY''' e centrata in A . Sia X' l'intersezione di questa circonferenza con l'asse AX' . Si conduca da X' la parallela ad UP' che incontra nel punto P l'asse verticale AU' . Si conduca da tale punto la perpendicolare all'asse UP' che incontra in Y la retta XY' . Il luogo di Y al variare di X è $x \cdot (x^2 + x + 1)$.
FINE PROCEDURA.

Percorso 8

Rappresenta il luogo dei punti determinato da $x^4 - 1$ e $x^4 + 1$ nello stesso grafico.

- Quale dei due polinomi puoi costruire anche col prodotto di due binomi?
- Quale procedimento ti sembra più semplice?

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine A . Si fissa il segmento unitario AU sull'asse orizzontale. Si pone il punto X sull'asse orizzontale. Si traccia la perpendicolare ad AX passante per X . Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio AX e centrata in A . Sia X' l'intersezione di questa circonferenza con l'asse verticale. AX' . Si costruisce il segmento UX' e si conduce per X la parallela ad esso che incontra in P' l'asse verticale AX' . Da tale punto si conduce la perpendicolare all'asse AX' che incontra in Y' l'asse XY' . Il luogo generato da Y' è $y = x^2$. Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio AY' e centro centrata in A . Sia X'' l'intersezione con l'asse AX . Da tale punto si conduce la parallela alla retta passante per XP' che incontra l'asse verticale AP' in P . Si conduce la perpendicolare da tale punto all'asse verticale AP' che incontra l'asse AX in y . Il luogo generato da Y' è $y = x^4$. Con lo strumento **compasso** si traccia una circonferenza di raggio AU e centrata in Y che rappresenta

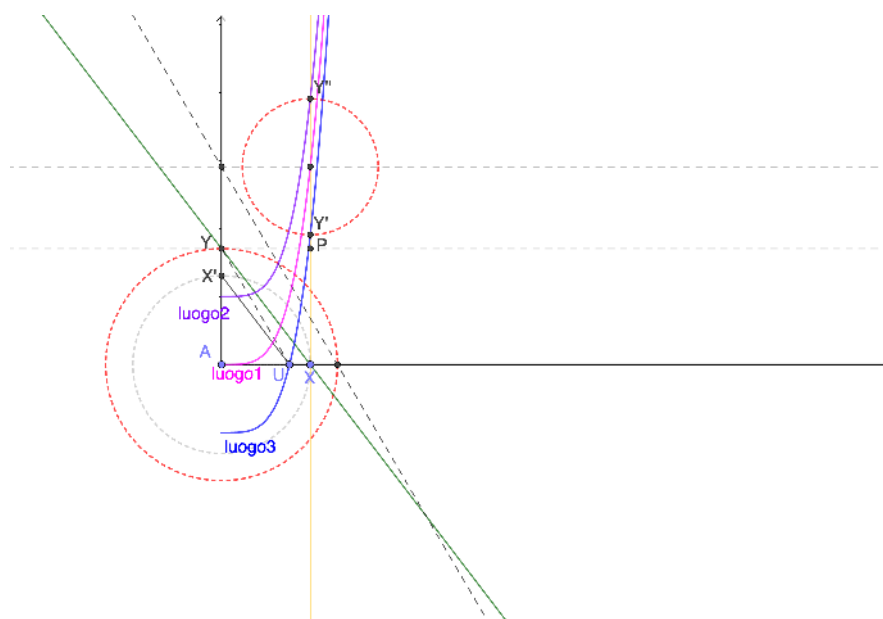


Figura 6.26. Percorso 8

l'incremento ed il decremento di 1 . Sia Y'' l'intersezione di questa circonferenza con l'asse XY (verso l'alto) e sia Y''' l'intersezione di questa circonferenza con l'asse XY (verso il basso) . Il luogo di Y'' al variare di X è $y = x^4 + 1$ mentre il luogo di Y''' al variare di X è $y = x^4 - 1$.

FINE PROCEDURA.

Percorso 9

Costruisci un polinomio a tua scelta che sia almeno di terzo grado e che sia costituito da almeno tre fattori

6.6.3 Esplorazioni sul rapporto di grandezze variabili

Percorso 10

Dall'informazione relativa a come viene effettuata la divisione tra segmenti $y = \frac{z}{x}$, prova a scrivere il rapporto tra due termini di cui uno è il segmento unità, e individua il luogo dei punti generato dalla variazione di x .

Imposta la proporzione relativa alla figura:

- Scrivi la relazione che sussiste tra x e y .
- Disegna, utilizzando l'algebra di Cartesio, il procedimento per trovare questa relazione e disegna il luogo dei punti da essa generato.

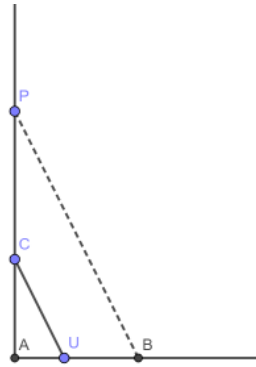


Figura 6.27. Percorso 10 a

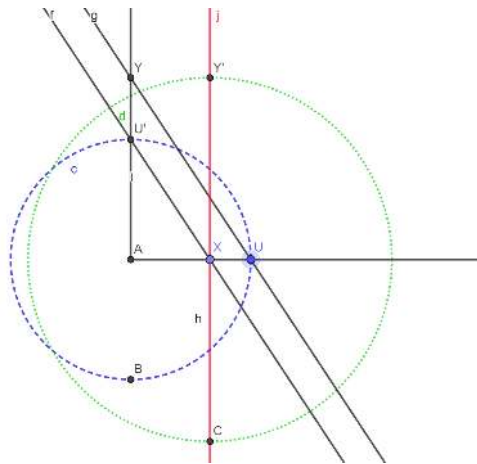


Figura 6.28. Percorso 10 b

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si Individua il quadrante di origine A e si fissa il segmento unità AU sull'asse orizzontale; dopodiché tramite lo strumento compasso si riporta il segmento unità sull'asse verticale (AU').

Si fissa un punto X sull'asse orizzontale e da esso si conduca la perpendicolare ad AX passante per X .

Si costruisce il segmento $U'X$ e si traccia la parallela ad $U'X$ passante per U , chiamando Y il punto di intersezione con l'asse verticale. I triangoli $AU'X$ e AYU sono simili, pertanto vale la proporzione:

$$AY : AU = AU' : AX$$

e ponendo $AX = x$, $AY = y$, $AU = AU' = 1$ si ottiene:

$$y : 1 = 1 : x$$

Riportando con lo strumento compasso il segmento AY sulla perpendicolare passante per X precedentemente disegnata, si individua il punto di intersezione Y' . In questo modo, al variare di x lungo l'asse orizzontale si genera il luogo $y = \frac{1}{x}$.

FINE PROCEDURA.

Percorso 11

Utilizzando il procedimento relativo alla somma e differenza tra segmenti disegna il luoghi dei punti $y = \frac{1}{x} + 1$.

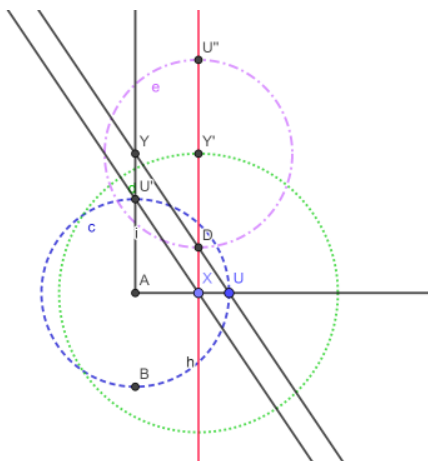


Figura 6.29. Percorso 11 a

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine A e si fissa il segmento unità AU sull'asse orizzontale; ripetendo quanto fatto nel percorso 1, si costruisce il luogo $y = \frac{1}{x}$. Dopodiché usando lo strumento compasso centrato nel punto Y' si riporta il segmento unità AU sulla perpendicolare passante per X , chiamando Y'' il punto di intersezione con tale retta. In questo modo al variare di x lungo l'asse orizzontale si genera il luogo $y = \frac{1}{x} + 1$.

FINE PROCEDURA.

Utilizzando il procedimento relativo alla somma e differenza tra segmenti disegna con GeoGebra il luoghi dei punti $y = \frac{1}{x+1} - 1$.

UNA POSSIBILE PROCEDURA: Si individua il quadrante di origine A e si fissa il segmento unità AU sull'asse orizzontale; dopodiché tramite lo strumento compasso si riporta il segmento unità sull'asse verticale (AU').

Si fissa un punto X sull'asse orizzontale e da esso si conduce la perpendicolare ad AX passante per X . Usando lo strumento compasso centrato nel punto X si riporta il segmento unità AU sull'asse orizzontale denominando U'' il punto di intersezione con tale asse. A questo punto si costruisce il segmento $U'U''$, e la retta parallela ad $U'U''$ passante per U , chiamando Y il punto di intersezione con l'asse verticale. I triangoli $AU'U''$ e AYU sono simili, pertanto vale la proporzione:

$$AY : AU = AU' : AU''$$

e ponendo $AU' = x + 1$, $AY = y$, $AU = AU'' = 1$ si ottiene:

$$y : 1 = 1 : (x + 1)$$

del segmento AX per se stesso. Partendo da tale costruzione si traccia il segmento $U'Y$ e poi la parallela ad $U'Y$ passante per U , e sia Y'' il punto di intersezione con l'asse verticale. I triangoli $AU'Y$ e $AY''U$ sono simili, pertanto vale la proporzione:

$$AY'' : AU = AU' : AY$$

e ponendo $AY = x^2$, $AY'' = y$, $AU = AU' = 1$ si ottiene:

$$y : 1 = 1 : x^2$$

si riporta il segmento AY'' utilizzando lo strumento **compasso** centrato in X sulla retta perpendicolare passante per X e si chiami Y''' il punto di intersezione con tale retta. Al variare di x si genera il luogo $y = \frac{1}{x^2}$.

FINE PROCEDURA.

Percorso 13

Disegna il luogo dei punti generato dalla somma dei luoghi $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x+1}$.

Percorso 14

Disegna il luogo dei punti $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$.

6.7 Riflessioni su una esperienza didattica

Nell'a.s. 2023/24, è stata realizzata una sperimentazione del percorso didattico sopra illustrato, in due classi seconda di liceo scientifico ad indirizzo matematico. È stata condotta presso il liceo Plinio Seniore -Roma, all'interno della cornice del LM che ha consentito, anche in questo caso (come per il percorso sulla brachistocrona, vd. paragrafo 5.10) di avere degli spazi aggiuntivi ove esplorare anche una didattica laboratoriale.

Inoltre, come per il percorso sulla brachistocrona, è stato possibile effettuare alcune osservazioni di carattere qualitativo relativamente alla risposta emozionale e all'interesse degli studenti sia durante l'attività (feedback in itinere) sia attraverso interviste di gradimento e riflessione condotte al termine del percorso (feedback finale), senza la pretesa di misurare l'efficacia dell'uso della storia (vd. paragrafo 3.2, Rogers, 1993, Clark, 2019).

Osservare il processo in cui gli studenti sono protagonisti dell'apprendimento è interessante per il raggiungimento del mio obiettivo di ricerca OAA1 - PERCORSI A PARTIRE DALLA STORIA, sopra menzionato. Infatti, questa è un *milieu*, ovvero una situazione appositamente creata per consentire agli studenti di ripercorrere le fasi della scoperta del concetto di covariazione (vd. paragrafo 3.2).

Ho scelto di sperimentare il percorso in compresenza con la collega dottoranda (vd. Coppa e Palma, 2023c, Coppa e Palma, 2023b e Coppa e Palma, 2023a), poiché in tal modo è stato possibile effettuare osservazioni nel duplice ruolo di insegnante e ricercatore. Lo scambio dei ruoli, concordato nella progettazione ma anche improvvisato in modo armonico nella complessità dell'ambiente classe,

ha consentito ad entrambe di osservare le strategie spontanee di risoluzione e la formazione del pensiero matematico nei ragazzi, le dinamiche collaborative e le interazioni che avvengono tra gli studenti nel processo di scoperta, ha permesso anche di esaminare le influenze tra insegnanti e studenti e tra insegnanti e ricercatori. Il dialogo e le riflessioni condivise hanno consentito modifiche evolutive sia delle prasseologie di docenti-ricercatori e docenti, sia del percorso proposto (vd. 3.4).

Dal materiale raccolto ('diario di bordo', libro GeoGebra, reazioni a caldo degli studenti, osservazioni dei due docenti sperimentatori e del docente d'aula accogliente) emergono risultati incoraggianti. Innanzitutto, l'approccio a partire dalla storia (rappresentato in questo caso dall'algebra dei segmenti di Cartesio) proposto con l'uso di strumenti informatici ha consentito agli studenti di percepire in maniera naturale il concetto di covariazione. La costruzione della figura luogo, e la relativa procedura individuata per la realizzazione della stessa, ha costituito uno dei momenti formativi volti all'acquisizione della consapevolezza da parte degli studenti del concetto di covariazione. Inoltre, è emerso che gli studenti hanno avuto modo di trovare relazioni a volte inaspettate ed elaborare consapevolmente l'immagine di funzione, senza passare dunque per la complicata e artificiosa trattazione numerica della continuità. Nelle attività non guidate, presenti nella parte finale del modulo 'Luoghi geometrici', ciascun gruppo ha prodotto una procedura di risoluzione concordata. In vari casi sono emerse diverse procedure, parimente corrette, che consentivano la risoluzione del medesimo problema, come si può riscontrare nella figura 6.32. Ciò ha costituito un'opportunità significativa per sviluppare e consolidare abilità argomentative e comunicative di contenuti matematici, coerentemente con gli obiettivi didattici della sperimentazione.

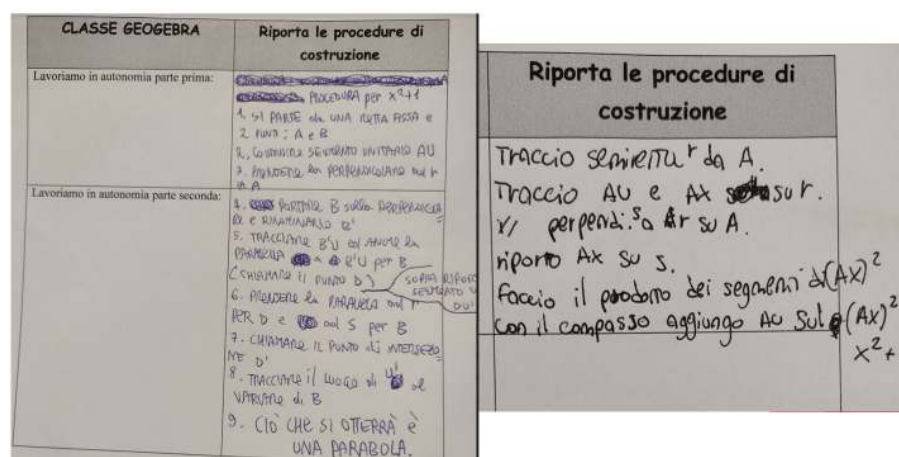
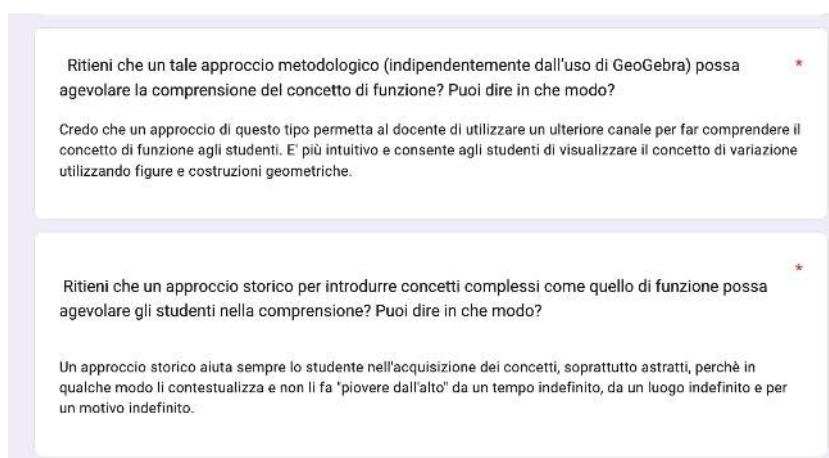


Figura 6.32. Differenti procedure risolutive degli studenti per il luogo descritto da $x^2 + 1$

A distanza di quasi un anno dalla sperimentazione, ho somministrato ai docenti coinvolti un questionario mirato a rilevare i punti di forza e di debolezza del progetto. Sono emersi molti aspetti interessanti, senz'altro utili per una revisione futura del percorso. In particolare, come si osserva nella figura 6.33 riportante alcune risposte al questionario, i docenti intervistati ritengono che l'introduzione di un concetto complesso, come quello di funzione, attraverso un seme storico (vd. 3.2.1) supportato

6. Proposta di un percorso didattico secondo un approccio storico: Il concetto di covariazione a partire dall'algebra dei segmenti di Cartesio

da una metodologia adeguata, possa effettivamente favorire una comprensione più consapevole da parte degli studenti.



Ritieni che un tale approccio metodologico (indipendentemente dall'uso di GeoGebra) possa agevolare la comprensione del concetto di funzione? Puoi dire in che modo?

Credo che un approccio di questo tipo permetta al docente di utilizzare un ulteriore canale per far comprendere il concetto di funzione agli studenti. E' più intuitivo e consente agli studenti di visualizzare il concetto di variazione utilizzando figure e costruzioni geometriche.

Ritieni che un approccio storico per introdurre concetti complessi come quello di funzione possa agevolare gli studenti nella comprensione? Puoi dire in che modo?

Un approccio storico aiuta sempre lo studente nell'acquisizione dei concetti, soprattutto astratti, perchè in qualche modo li contestualizza e non li fa "piovere dall'alto" da un tempo indefinito, da un luogo indefinito e per un motivo indefinito.

Figura 6.33. Estratto del questionario rivolto ai docenti

Inoltre, ritengono anche interessante sperimentare il percorso in un contesto differente, ossia dopo aver introdotto in classe il concetto di funzione. In tal modo, nell'ottica del riorientamento, gli studenti si troverebbero di fronte ad un'altra immagine del concetto di funzione (vd.3.2.2). Immagini concettuali differenti, infatti, aiutano a colmare il divario tra *concept definition* e *concept image* che può non coincidere con la definizione formale e può includere idee errate o incomplete (vd. Tall e Vinner, 1981).

Complessivamente, gli aspetti critici emersi sia durante la sperimentazione sia dall'analisi del questionario riguardano principalmente i tempi da dedicare alle attività didattiche proposte. In particolare, alcune attività hanno richiesto più tempo del previsto a causa di diversi fattori. Da un lato, la scarsa familiarità con lo strumento GeoGebra ha in alcuni casi rallentato il lavoro degli studenti; dall'altro, la necessità di collaborare in gruppo ha richiesto tempi più lunghi per la progettazione e la condivisione di una procedura comune. Di conseguenza, risulta complicato integrare questo tipo di attività nella programmazione curricolare tradizionale, mentre trova una collocazione più naturale all'interno del percorso del liceo matematico.

Capitolo 7

L'efficacia didattica del Liceo Matematico attraverso le prove INVALSI

A partire dal 2022, ho fatto parte di un gruppo di ricerca, composto da statistici, esperti di didattica della matematica e insegnanti della scuola secondaria di secondo grado, con l'obiettivo di misurare, sotto diverse lenti interpretative, gli apprendimenti raggiunti, sia in italiano sia in matematica, dagli studenti aderenti al progetto liceo matematico e di confrontarli con quelli degli altri studenti non aderenti, in modo rigoroso da un punto di vista statistico. Lo studio è stato pubblicato sulla rivista *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* (Bernardi et al., 2024). Di seguito riporto i risultati ed il contesto di questa ricerca.

Il lavoro risponde al mio obiettivo di ricerca OAA2 - ANALISI QUANTITATIVA, ovvero analizzare quantitativamente alcune variabili relative agli apprendimenti al fine di stimare quanto il processo formativo legato al LM possa incidere sulla valorizzazione e sul miglioramento delle situazioni di partenza degli studenti (vd. paragrafo 1.2).

7.1 Scenario e domande di ricerca

Nel programma Education and Training 2020, il secondo dei quattro obiettivi strategici è Improving the quality and efficiency of education and training (Migliorare qualità ed efficacia dell'istruzione e della formazione) che attraverso le otto competenze chiave di cittadinanza europea mirano al raggiungimento dei benchmark indicati¹. L'Educational Effectiveness Research (EER) ha prodotto molta letteratura per rispondere alle domande *What makes a "good" school? How do we make more schools "good"?* Diversi sono i modelli per la misura dell'efficacia, come ad esempio, il modello globale Creemers (1994), il Modello dinamico Creemers e Kyriakides (2008)².

¹Notices from European Union Institutions and Bodies Council conclusions of 12 May 2009 on a strategic framework for European cooperation in education and training ('ET 2020')

²vd. Creemers, 1994 e Creemers e Kyriakides, 2008

Relativamente alla realtà italiana, ci si ferma essenzialmente all'indagine delle performance cognitive attraverso i livelli delle competenze in matematica e italiano (INVALSI, OCSE PISA).

L'INVALSI³ è l'ente di ricerca che, tra le altre mansioni, effettua verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni scolastiche. In particolare, la consistenza del quadro teorico delle prove INVALSI di matematica con le Indicazioni Curricolari Ministeriali (nello specifico, per il secondo ciclo con gli Assi Culturali, le indicazioni nazionali per i Licei e le Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali), così come anche il disegno delle rilevazioni e le modalità di restituzione dei dati (INVALSI, 2018), fanno sì che i dati di queste valutazioni forniscano informazioni utili e possano diventare strumenti interpretativi di alcuni aspetti dei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, specifici del contesto (Ferretti et al., 2023).

I dati INVALSI degli studenti in uscita dalla scuola secondaria di secondo grado sembrano avere un valore predittivo per la carriera universitaria (Gambini & altri, 2022), e hanno anche un potere discriminante più attendibile rispetto al voto dell'esame di Stato, la cui validità invece è stata spesso messa in discussione (Anzellotti & Mazzini, 2009). Del resto, per l'accesso ai corsi universitari le Università italiane non fanno riferimento all'esito dell'esame di Stato e adottano test d'ingresso specifici in linea con quanto previsto dal D.M. del 22 ottobre 2004, n. 270.

L'orientamento odierno del VALSIS (Valutazione di Sistema e delle Scuole) ritiene che «la valutazione delle scuole ha lo scopo di valutare il funzionamento delle singole scuole, mettendo in relazione i diversi contesti di partenza, i processi didattici e organizzativi attuati e i risultati ottenuti»⁴.

Manca, al momento, un modello che si occupi delle componenti sociologiche, psicologiche e cognitive e, soprattutto, che orienti la ricerca ai fattori di efficacia educativa, piuttosto che esclusivamente di apprendimento.

A tale scopo, abbiamo deciso di utilizzare i risultati delle prove INVALSI degli studenti iscritti a sezioni di LM, confrontandoli con i risultati degli studenti iscritti nelle stesse scuole ma in sezioni non del liceo matematico (alcune delle quali con altre sperimentazioni in corso).

Ovviamente, siamo consapevoli che lo studio dei risultati degli esiti degli studenti che frequentano il Liceo Matematico è viziato da alcuni fattori. In primo luogo, i percorsi del Liceo Matematico sono per lo più attivati, di fatto, presso scuole in cui sono presenti professori preparati, attivi e in contatto – spesso, in collaborazione – con gruppi di ricerca in didattica della matematica. Inoltre, gli studenti del Liceo Matematico, accettando di svolgere ore extra curriculari, sono curiosi e motivati, e, come mostrano dati informali raccolti, raggiungono generalmente alti livelli di apprendimenti in matematica.

Pertanto, oltre a rilevare il livello di apprendimenti in matematica degli studenti aderenti al progetto – dato oggettivo che comunque fornirebbe conferma di informazioni raccolte fino ad oggi solo in maniera informale – abbiamo analizzato se e come il progetto del Liceo Matematico abbia un'effettiva ricaduta su questi apprendimenti.

³<http://www.invalsi.it>

⁴<http://www.invalsi.it/valsis>

Ci siamo prefissi un duplice obiettivo: la rilevazione degli apprendimenti raggiunti dagli studenti che partecipano al progetto Liceo Matematico mediante l'analisi dei risultati nelle prove INVALSI e la misurazione dell'impatto che la partecipazione al progetto ha negli apprendimenti rilevati.

Per raggiungere questo secondo obiettivo abbiamo intrapreso un'analisi longitudinale nel corso del tempo, confrontando l'andamento delle performance nell'apprendimento della matematica e dell'italiano tra gli studenti che partecipano al Liceo Matematico e gli studenti che non vi partecipano, all'interno delle medesime scuole. Inoltre, abbiamo allargato il confronto a livello nazionale, considerando i risultati degli studenti che hanno conseguito punteggi simili nei test INVALSI di matematica al termine della scuola secondaria di primo grado.

Si è quindi pensato di analizzare i risultati delle prove INVALSI di italiano e matematica, limitatamente alle scuole che hanno aderito per prime alla sperimentazione dei LM è che hanno completato un ciclo quinquennale. In particolare, ci siamo posti le seguenti domande di ricerca.

- Gli apprendimenti in matematica degli studenti del Liceo Matematico sono in media migliori degli apprendimenti degli studenti delle stesse scuole che non partecipano al progetto?
- Gli apprendimenti degli studenti del liceo matematico migliorano sia nel passaggio dalla secondaria di I grado alla secondaria di II grado, sia nel corso della secondaria di II grado, rispetto agli apprendimenti degli studenti che non aderiscono al progetto?
- L'efficacia del liceo matematico, in termini di misura di quanto un processo formativo è in grado di incidere sulla valorizzazione e sul miglioramento delle situazioni di partenza, varia a seconda del genere o dell'abilità iniziale dello studente?

Per efficacia, in questo caso, intendo la misura di quanto un processo formativo sia in grado di incidere sulla valorizzazione e sul miglioramento delle situazioni di partenza (Minello, 2012).

Si noti che per la prima domanda si poteva prevedere una risposta positiva: è probabile che gli studenti che aderiscono al progetto LM, accettando di fare ora extra curricolari, tendano ad avere, in media, buoni risultati. Molto più delicate sono le altre domande.

7.2 I dati

La ricerca si basa su un'indagine di natura esplorativa e conoscitiva, in cui la popolazione di riferimento è costituita dall'insieme di tutti gli studenti di scuola secondaria che appartengono alla coorte che ha svolto le prove INVALSI del grado 10 nel 2019 e del grado 13 nel 2022, per i quali fosse disponibile anche il risultato della prova di grado 8 (sostenuta nel 2017). Di seguito le motivazioni.

La raccolta dei dati e la definizione del progetto sperimentale non sono state prive di ostacoli. Innanzitutto, l'accesso ai dati INVALSI avviene tramite i Dirigenti

Scolastici. Per tale motivo, oltre al fine di ridurre i tempi e snellire la procedura di adesione, si è deciso di limitare ai contatti diretti del gruppo di ricerca. Dunque, si è scelto di adottare un campionamento ragionato (non probabilistico), in cui la selezione delle scuole è stata demandata a diversi membri del gruppo di ricerca impegnato nello studio.

È chiaro che l'impossibilità di selezionare le unità con un meccanismo casuale impedisce la generalizzazione dei risultati ottenuti a livello di tutta la popolazione. Tuttavia, confidando nel fatto che si è cercato di evitare distorsioni, per quanto possibile, e di rispecchiare al meglio la variabilità della popolazione, si ritiene che il campione esaminato consenta di ricostruire con buona approssimazione le caratteristiche della popolazione di riferimento.

Inoltre, come già detto, sono state incluse nello studio tutte le sezioni delle scuole considerate nella specifica coorte di interesse, usando quindi come gruppo di controllo tutte le classi non aderenti al Liceo Matematico delle stesse scuole.

Infine, abbiamo dovuto tener conto di un problema organizzativo: in alcune scuole (circa 1/3 del totale) gli studenti che seguono il progetto Liceo Matematico non sono raccolti in un'unica sezione, ma in classi trasversali, formate da studenti di diverse classi ma dello stesso anno scolastico. In questi casi, l'orario è congegnato in maniera tale che gli studenti provenienti dalle diverse sezioni si possano ritrovare insieme per le ore extra-curricolari, in genere a fine mattinata o inizio pomeriggio. La partecipazione all'indagine delle scuole con tale organizzazione avrebbe reso estremamente laborioso lo studio, sia per quanto riguarda l'identificazione dei codici dei singoli studenti, sia perché la struttura di una classe trasversale è meno rigida e gli abbandoni del percorso non rappresentano un'eccezione.

Ci siamo quindi limitati ad analizzare solo i dati delle scuole con sezioni intere dedicate al progetto Liceo Matematico, escludendo pertanto le scuole con classi trasversali. La difficoltà di raccolta longitudinale dei dati ha rappresentato un ulteriore ostacolo in quanto negli anni scolastici 2019-20 e 2020-21, a causa della pandemia, le prove INVALSI non sono state effettuate regolarmente.

Pertanto, alla luce di tutte le considerazioni sopra esposte, abbiamo deciso di considerare i risultati degli studenti in tre prove successive, che si riferiscono ai gradi 8, 10 e 13, limitandoci ad analizzare una sola coorte completa di dati, cioè degli studenti che hanno sostenuto nel 2017 le prove del Grado 8, nel 2019 le prove del Grado 10 e nel 2022 le prove del Grado 13.

Le scuole coinvolte sono 11, appartenenti a 5 province differenti: Roma, Catania, Caserta, Avellino e Latina. Il totale degli studenti è di 2588 di cui 356 appartenenti al LM.

Il metodo che abbiamo adottato per studiare l'impatto del progetto è stato il seguente: tenendo conto che ciascuno studente è identificato univocamente, in modo anonimo, dal suo codice SIDI INVALSI, abbiamo analizzato l'andamento degli apprendimenti a partire dai punteggi ottenuti nelle prove INVALSI della scuola secondaria di primo grado, prima dell'inizio del percorso del Liceo Matematico, e nelle due prove INVALSI previste nella scuola secondaria di secondo grado.

Per ciascuno studente, identificato univocamente dal codice SIDI INVALSI, sono riportate informazioni relative a:

- caratteristiche anagrafiche (es.: genere, anno e luogo di nascita, età, titolo di studio e professione dei genitori)
- scuola di appartenenza (codice meccanografico, comune, provincia, regione)
- carriera dello studente (sezione, regolarità, punteggio ESCS Economic, Social and Cultural Status, voti scritti e orali in Italiano e in Matematica)
- punteggi WLE (stima delle abilità secondo il modello di Rasch, per approfondire si veda Warm, 1989) in Italiano e in Matematica e i corrispondenti livelli
- risposte per ciascun quesito della prova INVALSI.

I dati forniti dall'INVALSI sono stati integrati con l'informazione, ottenuta direttamente dai dirigenti scolastici, circa l'adesione al Liceo Matematico da parte delle singole sezioni.

Per evitare distorsioni dovute al contesto socio-economico e ad altri fattori, abbiamo deciso di non considerare come termine di confronto i dati nazionali, ma quelli relativi agli studenti, delle stesse scuole, che frequentano le sezioni non aderenti al progetto e che pertanto costituiscono un riferimento attendibile. Si sottolinea che gli stessi insegnanti sono in genere impegnati sia nelle classi di LM sia in altre classi della stessa scuola; si può dunque ritenere che il rendimento nei due gruppi non sia direttamente riconducibile all'insegnante. Inoltre, nella maggioranza delle scuole considerate sono presenti varie proposte didattiche oltre al Liceo Matematico: anche alcune delle altre sezioni sono composte da studenti che decidono di seguire un percorso "speciale" (es. Cambridge) e, di conseguenza, anche in altre sezioni ci si può attendere un'autoselezione in entrata.

7.3 Metodo

Nonostante i dati analizzati facciano parte di un campione ragionato (e non probabilistico) e quindi l'analisi abbia carattere descrittivo, sono individuabili con chiarezza gli effetti della partecipazione al Liceo Matematico, sulla base dei punteggi WLE⁵ (*Warm's mean Weighted Likelihood Estimates*) ottenuti nelle prove di italiano e matematica. Di questi punteggi è stata considerata la suddivisione in due classi (studenti del LM e non del LM) ed è stato quindi analizzato l'andamento nell'arco di tempo dei tre gradi considerati.

Si ritiene che il campione ottenuto, per quanto parziale, consenta di ricostruire con buona approssimazione le caratteristiche della popolazione di riferimento. In ogni caso, proprio per compensare eventuali distorsioni, sono state incluse nello studio tutte le sezioni delle scuole considerate nella specifica coorte di interesse, usando come gruppo di controllo le classi non aderenti ai LM. In altre parole, anche nel caso in cui le scuole coinvolte abbiano un buon rendimento medio, il gruppo di controllo si riferisce alle stesse scuole e risulta quindi affidabile.

⁵Stima delle abilità secondo il modello di Rasch

7.4 Risultati

Innanzitutto, come si può notare dalle tabelle 7.1 e 7.2, i punteggi medi ottenuti dagli studenti coinvolti nella presente indagine sono uniformemente superiori, soprattutto per quanto riguarda la matematica a conferma di quanto avevamo congetturato.

	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
Italiano	8	73,18	364,29	212,71	210,56	39,20
	10	54,52	322,80	216,74	216,06	35,44
	13	38,04	323,60	202,15	199,94	37,52
Matematica	8	53,98	365,01	215,43	214,17	41,67
	10	75,94	313,85	220,71	220,92	38,00
	13	73,46	311,73	208,56	208,41	40,23

Tabella 7.1. Principali statistiche descrittive della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per tutti gli studenti analizzati (N = 2588)

	Grado	media	ds
Italiano	8	193,94	39,87
	10	200,67	39,86
	13	185,40	41,11
Matematica	8	196,69	40,58
	10	201,36	39,71
	13	190,98	39,33

Tabella 7.2. Media e deviazione standard (ds) della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, a livello nazionale (Fonte: Rapporti INVALSI disponibili alla pagina web <https://www.invalsi.it/invalsi/istituto.php?page=rapporti>)

I punteggi ottenuti nelle prove INVALSI di italiano e matematica (vedasi tabelle 7.3 e 7.4) mostrano risultati incoraggianti a favore del LM. In particolare la ricerca ha mostrato come, pur partendo da risultati sostanzialmente uniformi alla fine della scuola secondaria di primo grado, nei gradi successivi si registra una netta differenza nei punteggi WLE a favore degli studenti del LM.

L'analisi dei dati mostra che l'effetto attribuibile all'adesione al progetto LM sul punteggio in matematica è positivo: a parità di tutti gli altri fattori considerati, uno studente LM ha un vantaggio rispetto ad uno studente non LM. Il discorso riguarda anche il punteggio in italiano, il che è coerente con il carattere interdisciplinare del LM.

Di seguito, nella figura 7.1, per agevolare il confronto, vengono rappresentate graficamente le stesse informazioni che sintetizzano l'andamento dei punteggi medi nei tre gradi considerati.

In generale si nota che la distribuzione dei punteggi al grado 8, per i due sottogruppi di studenti LM e NO-LM, è sostanzialmente la stessa per le prove di Italiano, mentre i punteggi delle prove di Matematica in media tendono ad essere leggermente più elevati nel sottogruppo LM fin dal grado 8. Nelle prove successive

	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
Italiano	8	73,18	364,29	211,81	210,26	39,10
	10	54,52	322,80	215,59	214,78	35,71
	13	38,04	323,60	200,03	198,07	37,64
Matematica	8	53,98	365,01	213,47	212,93	40,88
	10	75,94	313,85	216,83	218,46	37,50
	13	73,46	311,73	205,02	205,15	39,86

Tabella 7.3. Principali statistiche descrittive della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per i soli studenti non aderenti al Liceo Matematico (N = 2232)

	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
Italiano	8	81,00	352,04	215,72	212,44	39,82
	10	133,26	315,51	226,07	224,06	32,60
	13	96,71	288,33	213,80	211,65	34,63
Matematica	8	76,77	324,53	222,56	221,92	45,63
	10	113,73	313,85	236,80	236,39	37,49
	13	105,86	311,73	228,33	228,88	36,39

Tabella 7.4. Principali statistiche descrittive della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per i soli studenti aderenti al Liceo Matematico (N = 356)

(grado 10 e 13) la differenza si fa più marcata: gli studenti LM totalizzano punteggi più elevati per ciascun grado e ciascuna materia, in particolare in matematica.

La ricerca ha poi preso in esame altre variabili, in particolare la differenza di genere, e gli effetti sugli studenti più fragili. In Tabella 7.5 viene riportata la distribuzione doppia per genere e adesione al progetto Liceo Matematico.

Genere	NO LM	LM	Totale
Maschio	1118	221	1339
Femmina	1114	135	1249
Totale	2232	356	2588

Tabella 7.5. Distribuzione doppia per genere e adesione al progetto Licei Matematici

La proporzione di maschi (51.7%) è leggermente superiore rispetto a quella delle femmine (48.3%); la situazione è bilanciata all'interno del sottogruppo NO-LM (50% vs 50%). Tuttavia, limitando l'attenzione al solo sottogruppo Liceo Matematico, si nota una prevalenza dei maschi (62.1%) rispetto alle femmine (37.9%). In pratica l'associazione tra genere e adesione risulta significativa e i maschi sembrerebbero dunque più propensi ad aderire al progetto del Liceo Matematico. In realtà, questo dato è piuttosto in linea con la proporzione di maschi frequentanti i licei scientifici, come si riscontra dai dati resi disponibili dal Ministero dell'Istruzione e del Merito, <https://dati.istruzione.it/>. Ad esempio, in entrambi gli anni scolastici 2018-19 e 2020-21 la percentuale di studenti iscritti al liceo scientifico di genere maschile era del 57% a fronte del 43% di genere femminile.

I grafici in Figura 7.2 sintetizzano l'andamento medio dei punteggi nell'arco

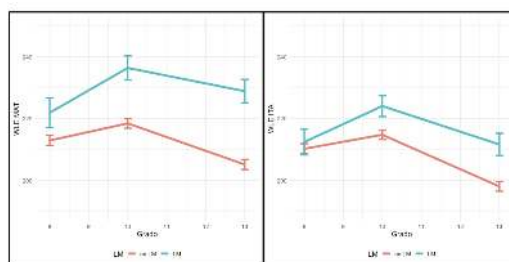


Figura 7.1. Medie delle distribuzioni dei punteggi separatamente per Matematica (pannello a sinistra) e Italiano (pannello a destra) nei diversi gradi considerati, rispettivamente per gli studenti LM e NO-LM.

temporale delle tre prove per ciascuna materia e per ciascun genere, separatamente per maschi e femmine.

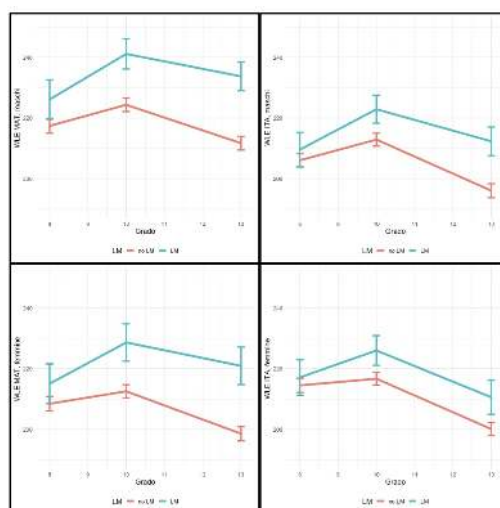


Figura 7.2. Medie delle distribuzioni dei punteggi separatamente per Matematica (pannelli a sinistra) e Italiano (pannelli a destra) nei diversi gradi considerati, rispettivamente per gli studenti LM e NO-LM, di genere maschile e femminile.

Le considerazioni emerse dall'analisi riferita all'intero collettivo sembrano confermate anche dopo la stratificazione per genere. In particolare, sia per i maschi sia per le femmine non è significativa la differenza iniziale (grado 8) nel punteggio di Italiano ottenuto dagli studenti LM e NO-LM; tra le femmine anche in Matematica la differenza non è sensibile, mentre tutti gli altri confronti fanno registrare punteggi più elevati per gli studenti del Liceo Matematico.

Infine, si è posta l'attenzione al gruppo degli studenti che in partenza (grado 8) sono risultati più in difficoltà. In particolare, abbiamo identificato il sottogruppo degli studenti che hanno riportato al grado 8 un punteggio inferiore al primo quartile della distribuzione sia in matematica sia in italiano. Nel collettivo in esame sono stati individuati complessivamente 325 studenti, di cui 44 partecipanti al LM e i restanti 281 appartenenti a sezioni non LM.

Al di là delle limitazioni dovute ai numeri relativamente esigui, è interessante

Punteggi	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
italiano	8	81	185,2	160,2	152	28,8
	10	133,3	290,6	201,5	203,6	42,5
	13	126,8	276,7	193,3	191,5	39,8
matematica	8	122,8	187,9	167,9	167,9	17,5
	10	113,7	313,8	208,7	210,3	37,3
	13	135,7	288,4	203,0	210,4	41,6

Tabella 7.6. Principali statistiche descrittive (minimo, massimo, mediana, media e deviazione standard, ds) della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi gradi considerati, per i soli studenti aderenti al Liceo Matematico ($N = 44$)

Punteggi	Grado	minimo	massimo	mediana	media	ds
italiano	8	81,3	186,6	166,8	160,1	22,3
	10	54,5	290,8	190,7	191,0	35,5
	13	38,0	287,8	168,2	169,4	34,5
matematica	8	91,4	187,9	165,0	160,0	23,2
	10	83,8	308,8	188,2	190,4	35,9
	13	73,5	298,5	180,8	178,1	36,3

Tabella 7.7. . Principali statistiche descrittive (minimo, massimo, mediana, media e deviazione standard, ds) della distribuzione dei punteggi separatamente per Italiano e Matematica nei diversi

notare dall'analisi dei grafici di Figura 7.3 e dalle statistiche riportate nelle Tabelle 7.6 e 7.7, che anche per gli studenti apparentemente più svantaggiati in partenza si è rilevato un miglioramento sensibile nei punteggi di entrambe le materie, al quale l'adesione al Liceo Matematico sembra aver contribuito. Nel caso della Matematica,

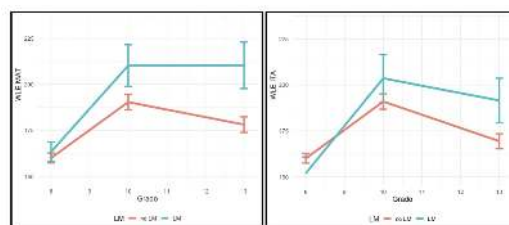


Figura 7.3. Medie delle distribuzioni dei punteggi separatamente per Matematica (pannello a sinistra) e Italiano (pannello a destra) nei diversi gradi considerati, rispettivamente per gli studenti LM e NO- LM, per il sottogruppo degli studenti considerato ($N = 325$).

addirittura nel grado 13 la media dei punteggi rimane stabile, in controtendenza rispetto a quanto osservato sul collettivo nel suo complesso.

7.5 Considerazioni finali

Come mostrato in Tabella 7.4, le statistiche descrittive della distribuzione dei punteggi delle prove INVALSI di Matematica e di Italiano evidenziano come gli studenti aderenti al progetto Liceo Matematico ottengano punteggi uniformemente superiori alla media italiana in tutti i gradi scolastici indagati. Queste analisi confermano con dati oggettivi delle aspettative informali per quanto riguarda la matematica e forniscono informazioni rilevanti anche per quanto riguarda l'italiano.

Il dato più rilevante di questa indagine è indubbiamente lo studio degli andamenti degli apprendimenti degli studenti nel corso degli anni, distinguendo gli studenti aderenti al progetto Liceo Matematico LM e quelli non aderenti NO-LM. Come si evince dai grafici e dalle tabelle, la distribuzione dei punteggi al grado 8 per i due sottogruppi di studenti è sostanzialmente la stessa per le prove di Italiano e c'è una lieve differenza a favore degli studenti LM per quanto riguarda la Matematica. La situazione esplode nei punteggi ottenuti nelle prove successive: in entrambe le materie gli studenti LM totalizzano punteggi più elevati e le distanze tra i punteggi ottenuti dai due gruppi di studenti sono tutte significative da un punto di vista statistico. Come mostrato in tabella 7.5 e in figura 7.2, i dati sono confermati anche dopo la stratificazione per genere. Analizzando i dati in riferimento agli studenti che hanno ottenuto nelle prove INVALSI di grado 8 un punteggio inferiore al primo quartile della distribuzione sia in Matematica sia in Italiano (tabelle 7.6 e 7.7 e figura 7.3) vediamo che le differenze tra i punteggi ottenuti nelle prove dei gradi successivi sono ancora più marcate. L'adesione al progetto Liceo Matematico sembra quindi aver contribuito in modo ancor più significativo per gli studenti più svantaggiati in partenza.

I dati di questo primo studio esplorativo sembrano rispondere positivamente alle nostre domande di ricerca e sembrano dunque indicare che l'adesione al progetto Liceo Matematico incida positivamente sul livello degli apprendimenti raggiunti sia in matematica sia in italiano, e in modo più marcato per gli studenti che ottengono punteggi bassi in entrambe le materie in uscita dal primo ciclo. Questi dati, particolarmente incoraggianti, oltre a confermare riscontri informali dei numerosi studenti e insegnanti aderenti al progetto, aprono a nuove piste d'indagine future che coinvolgeranno un campione più ampio di scuole.

Capitolo 8

Gli effetti dell'esperienza del liceo matematico in termini di atteggiamenti sviluppati da docenti e studenti

Il liceo matematico (LM), attraverso la didattica laboratoriale, si propone di favorire un apprendimento basato sulla partecipazione attiva e sulla costruzione di relazioni tra pari, ponendo l'accento sul processo anziché sul mero risultato (vd. capitolo 2).

Nella pratica didattica, i docenti sono chiamati a interpretare comportamenti, discorsi e produzioni degli studenti. Questo processo interpretativo include inevitabilmente aspetti affettivi, quali le convinzioni e le aspettative personali.

Negli studenti, paure o ansie legate alla matematica, che si manifestano nei primi anni scolastici, paiono essere in relazione con il modo in cui tale disciplina viene loro presentata, che è a sua volta strettamente correlata alle emozioni degli insegnanti (Di Martino e Sabena, 2011).

Gli studi che esaminano la relazione tra atteggiamento e apprendimento della matematica evidenziano come un atteggiamento positivo sia strettamente collegato al successo nella disciplina (vd. paragrafo 3.5).

In questo capitolo, dunque, mi propongo di caratterizzare gli atteggiamenti nei confronti della pratica didattica del LM, sia da parte dei docenti sia da parte degli studenti, rispondendo così al mio obiettivo di ricerca OAA3 - ANALISI DEGLI EFFETTI IN TERMINI DI ATTEGGIAMENTI.

Per questa analisi trovo particolarmente utile il costrutto TMA già discusso nel paragrafo 3.5. Tale costrutto è stato sviluppato per analizzare gli atteggiamenti nei confronti della matematica. Ho ritenuto interessante esplorarne l'applicazione anche in ambito metodologico, indagando sull'atteggiamento del docente stesso verso la pratica didattica del liceo matematico e di come questo influisca sull'atteggiamento dello studente verso la matematica.

Le domande di ricerca che hanno guidato il mio studio sono pertanto le seguenti:

- RQ1. Quale visione emerge dai docenti verso l'insegnamento della matematica in relazione alla pratica del LM?

- RQ2. Quali atteggiamenti verso la matematica, in termini di visione e senso di autoefficacia, emergono dagli studenti in relazione alla pratica del LM?

8.1 Il metodo

Coerentemente con il paradigma interpretativo, ho cercato di interpretare e dare un senso alle risultanze emerse, più che misurarle in maniera quantitativa (Di Martino e Zan, 2010 Ciani et al., 2019). È chiaro che in una ricerca qualitativa la soggettività dello studioso è ineludibile. D'altronde, qualunque strumento chiuso di raccolta dati risulta poco adatto per cogliere le espressioni emotive inconsce. Tali modalità chiuse possono limitare l'espressione autentica delle emozioni. Un questionario aperto, invece, permette una espressione più libera, consentendo di utilizzare le proprie parole e con esse la carica emotiva che portano con sé: il linguaggio personale rappresenta così il mezzo più immediato per accedervi e può fornire dati ricchi, autentici e approfonditi (vd. paragrafo 3.5).

Al fine di cogliere da un lato il rapporto dei docenti con la pratica del LM e dall'altro il rapporto degli studenti con la matematica e di come questo rapporto sia stato migliorato dalla pratica del LM, ho deciso di avvalermi anche dello strumento delle narrazioni (vd. paragrafo 3.5).

Ho svolto quindi un'indagine conoscitiva ed esplorativa, di carattere qualitativo, prendendo in considerazione un piccolo campione di convenienza, ovvero le scuole afferenti al polo Sapienza per il LM, coinvolgendo sia docenti sia ex studenti di LM.

Il campo di osservazione relativo al LM è molto vasto e variegato, per questo ho scelto di concentrarmi su alcuni aspetti specifici. Basandomi sulla mia esperienza di docente e considerando sia la prospettiva degli insegnanti sia quella degli studenti, ho individuato, coerentemente con due degli aspetti fondanti del LM, ovvero modalità laboratoriale e interdisciplinarietà (vd. capitolo 2), i seguenti elementi su cui focalizzare la ricerca:

- acquisizione da parte degli studenti dei metodi e degli strumenti propri dell'indagine matematica;
- acquisizione da parte degli studenti di competenze trasversali;
- inclusione degli studenti fragili;
- soddisfazione dei soggetti coinvolti.

8.2 Questionario rivolto ai docenti referenti del liceo matematico

Ho condotto questa indagine contattando preliminarmente i referenti delle scuole del polo Sapienza per sensibilizzarli sul tema di ricerca. Hanno dato la loro disponibilità a partecipare a questa indagine 16 referenti su un totale di 26, per lo più appartenenti a licei scientifici. Ho scelto di usare, per la raccolta delle loro narrazioni, un questionario che contemplasse sia domande chiuse, sia domande aperte con lo scopo di favorire la narrazione.

Il questionario è strutturato nelle seguenti tre sezioni:

- Informazioni sulla scuola
- Dati organizzativi sul liceo matematico nella scuola di appartenenza: Tipologia di sperimentazione e da quanti anni; Incremento/decremento/stabilità classi di LM; Interdisciplinarietà; Tracciamento del liceo matematico nel RAV.
- Dati sull'efficacia della sperimentazione: Ricaduta sull'apprendimento della matematica e delle altre discipline; Inclusività in caso di alunni con disabilità o più fragili; Eccellenze; Visibilità nel RAV/PTOF dei dati sul LM.

E' stato somministrato online, attraverso un modulo *google*, durante la seconda parte dell'anno scolastico, entro il mese di maggio 2022.

Una parte dei dati (prevalentemente quelli acquisiti da domande a risposta chiusa) è servita per restituire una visione d'insieme del piccolo campione considerato e che qui sintetizzo (vd. anche fig. 8.1).

- Non c'è in molte scuole ancora la visibilità del Liceo Matematico. Probabilmente bisogna sensibilizzare colleghi coinvolti e dirigenti affinché il LM abbia una buona visibilità nei documenti della scuola. Bisogna lavorare per far emergere tutte le sfaccettature del percorso di LM anche dai documenti ufficiali della scuola.
- Si registra un miglioramento dell'inclusività verso i più fragili e nel contempo crescita delle eccellenze.
- Si registra un miglioramento complessivo dell'acquisizione delle competenze matematiche.
- Le attività laboratoriali e la possibilità di usare diversi approcci per affrontare un tema vanno incontro ai diversi stili di apprendimento.
- L'approccio del LM valorizza maggiormente l'espressione di intelligenze più intuitive e capaci di cogliere collegamenti fra argomenti e temi diversi.

Il dato relativo all'inclusività verso gli studenti più fragili, come si vede nella figura 8.2, mostra che il LM non è percepito dai docenti come un percorso pensato solo per le eccellenze, cosa temuta da alcuni dirigenti e docenti¹. Le motivazioni sono diverse: gli studenti si sentono più liberi di mostrare le loro capacità, spesso lavorano in gruppo e gli alunni più deboli vengono aiutati dai compagni. Inoltre, emerge che l'approccio laboratoriale valorizza maggiormente l'espressione di intelligenze più intuitive e capaci di cogliere collegamenti fra argomenti e temi diversi.

L'assenza della valutazione tradizionale poi viene percepita come un aiuto per non mettere troppo in evidenza le situazioni di fragilità, e per consentire l'instaurarsi di un clima più sereno.

¹Tale considerazione emerge anche in Bernardi et al., 2022

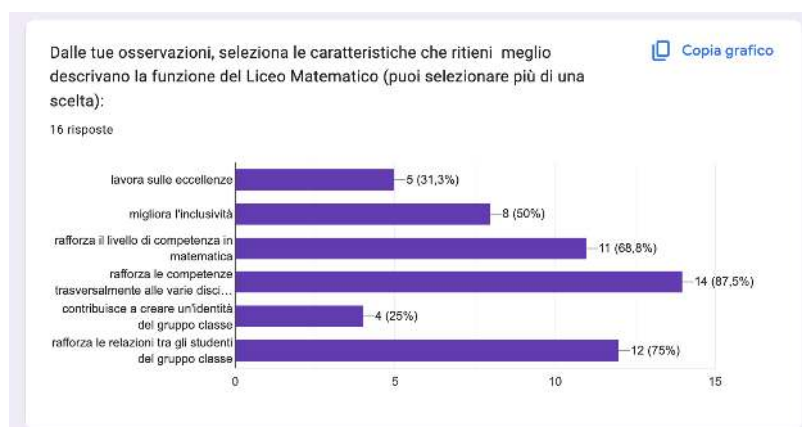


Figura 8.1. Caratteristiche del liceo matematico emerse dal questionario



Figura 8.2. Domanda estratta dal questionario

8.2.1 I risultati relativi al questionario

Per rispondere alla RQ1, ovvero 'Quale visione emerge dai docenti verso l'insegnamento della matematica in relazione alla pratica del LM?' ho analizzato le risposte relative a tre domande aperte del questionario, relativamente alla dimensione della visione, riducendolo alla dicotomia relazionale/strumentale (vd. Di Martino e Zan, 2010).

- **Domanda A-Docente.** Ritieni che la didattica attuata con il liceo matematico riesca a coinvolgere anche gli alunni tradizionalmente più deboli o meno motivati? Racconta.
- **Domanda B-Docente.** Ritieni che la didattica attuata con il liceo matematico favorisca la valorizzazione delle eccellenze? Racconta.
- **Domanda C-Docente.** Viene riscontrata, all'interno dei Consigli di Classe, una ricaduta positiva della sperimentazione di liceo matematico nell'apprendimento delle altre discipline? Racconta.

Le tre domande sono strutturate in due parti: una sezione a risposta chiusa seguita da una sezione a risposta aperta.

Dalla prima parte della domanda A risulta che, come si vede nella figura 8.2, l'87,5% considera la didattica attuata con il LM coinvolgente anche per gli alunni tradizionalmente più deboli o meno motivati.

Analizzando le narrazioni dei docenti relative alla domanda A, emerge la visione che hanno i docenti in relazione alla pratica del LM come didattica inclusiva. Riporto alcune risposte particolarmente rappresentative:

'Nel LM la spiegazione in modo naturale parte da domande e richiede agli studenti di porsi domande. Spesso queste domande sono proprio quelle che possono mettere in luce le maggiori difficoltà.'

'Le attività laboratoriali e la possibilità di usare diversi approcci per affrontare un tema possono venire incontro a diversi stili di apprendimento.'

'Le attività laboratorio aiutano nei casi di problemi di attenzione, gli alunni hanno possibilità di aiutarsi. Inoltre si può utilizzare in modo positivo la responsabilità verso il gruppo.'

'Le competenze sono diverse e i meno motivati nella didattica tradizionale, spesso riescono meglio nelle attività laboratoriali.'

'La didattica laboratoriale, il lavoro di gruppo favorisce una maggiore interazione tra pari. L'assenza della valutazione tradizionale aiuta a non mettere troppo in evidenza le situazioni di fragilità, e permette l'instaurarsi di un clima più sereno.'

'Sviluppa competenze che a volte rimangono nascoste con la didattica tradizionale.'

'Gli argomenti trattati incuriosiscono ed alcuni riescono ad approfondire raggiungendo elevati livelli di competenza.'

'La possibilità di proporre problemi e percorsi stimolanti può aiutare lo sviluppo di vari tipi di potenzialità.'

Le espressioni verbali tipo attività laboratoriali, quindi nuovo tipo di didattica, e/o diversi approcci alla disciplina da parte degli studenti si presentano collegate al superamento di difficoltà, gestione di situazioni di difficoltà e sviluppo di competenze. Emerge, pertanto, da parte del docente, una visione della didattica della matematica che mira a curare aspetti di tipo relazionale anziché strumentale della disciplina stessa, privilegiandone l'acquisizione profonda dei concetti e delle loro interrelazioni piuttosto che l'apprendimento mnemonico di regole e procedure.

E' interessante sottolineare che il restante 12,5% dei docenti che alla domanda chiusa risponde con 'non so' non fornisce alcuna narrazione nella relativa domanda aperta.

La domanda B, ovvero se il liceo matematico favorisce la valorizzazione delle eccellenze, in qualche modo complementa la domanda A, relativamente al gruppo classe. In questo caso, la risposta chiusa che la precede totalizza il 100% delle risposte positive. Di seguito riporto alcune frasi dei docenti:

'Il liceo matematico è uno spazio che risente meno dei vincoli temporali e tematici propri dell'attività didattica quotidiana. È uno spazio di ricerca sia per i docenti che per gli alunni che con ruoli diversi sono comunque portati entrambi a sperimentare, a creare. Gli alunni più abili sono stimolati continuamente all'approfondimento, alla riflessione, a trovare singolarmente e in gruppo tecniche e strategie di risoluzione di problemi.'

'I ragazzi si "permettono" di avanzare congetture che altrimenti non farebbero.'

'Sviluppa competenze che a volte rimangono nascoste.'

'Gli argomenti trattati incuriosiscono ed alcuni riescono ad approfondire.'

'Stimola anche la crescita dell'autonomia nell'approfondimento.'

'Si possono ritagliare momenti di individualizzazione dei percorsi.'

Dai testi analizzati, relativi alla domanda B, emerge che la visione della didattica del LM nel favorire la valorizzazione delle eccellenze è espressa da concetti come approfondimento, e/o possibilità di sperimentare che sono spesso associati a spazi di ricerca e di riflessione autonoma, suggerendo anche in questo caso un approccio del docente alla disciplina di tipo relazionale.

Analizziamo, infine, la domanda C, alla cui prima parte il 25% risponde 'sì, in modo evidente' ed il 56,3% risponde 'abbastanza', come si legge in figura 8.3.

Nelle risposte che sono state fornite alla sezione aperta della domanda C, che indaga sulla eventuale ricaduta positiva della sperimentazione di liceo matematico nell'apprendimento delle altre discipline, si ritrovano espressioni che rimandano a didattica interdisciplinare e/o argomentazione e che contribuiscono a formare un modello della visione della pratica del LM da parte dei docenti coinvolti. Riporto di seguito alcune delle frasi più significative:

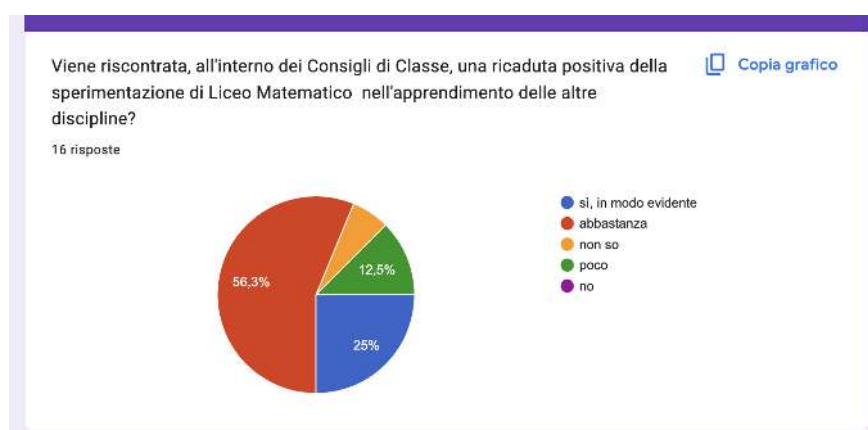


Figura 8.3. Domanda estratta dal questionario

'Gli alunni che frequentano il liceo matematico appaiono in qualche misura più abituati ad un approccio interdisciplinare, a cercare e trovare collegamenti tra discipline e sono generalmente più disponibili al lavoro di gruppo e a proporre presentazioni in pubblico.'

'Gli studenti sono curiosi e motivati, facili da coinvolgere nelle attività didattiche, sviluppano una maggiore disponibilità ad apprendere.'

'Gli alunni riescono con maturità a fare collegamenti ed argomentare, oltre ad una motivazione molto evidente nello studio di ciò che viene proposto.'

Dal restante 18,7% emerge che la ricaduta positiva della sperimentazione del LM si apprezza poco, attribuendo, nella maggior parte dei casi, la problematica alla adesione o meno da parte dei docenti al progetto, come ad esempio si legge in questa breve frase:

'Dipende dalla "sensibilità" dei colleghi'.

Anche dall'analisi di queste narrazioni relative alla domanda C, emerge una visione della pratica del LM che permette al docente, attraverso attività di tipo argomentativo, laboratoriale ed interdisciplinare, di coinvolgere e incuriosire la maggior parte degli studenti. Ciò è legato ad una visione della matematica di tipo relazionale: la matematica è percepita come un sistema di idee interconnesse, ricco di significati e in grado di dialogare con altre discipline. Gli studenti grazie a questa visione veicolata dal docente, tendono ad avere un atteggiamento più positivo, maggiore motivazione e un'esperienza di apprendimento più profonda.

La visione della matematica da parte del docente, può essere determinante per il successo formativo. Infatti, tale visione influenza profondamente l'atteggiamento complessivo degli studenti, agendo così da ponte tra le componenti emotiva e cognitiva dell'atteggiamento (Di Martino e Zan, 2010).

8.3 Intervista rivolta agli studenti di ex quinte

Ho intervistato poi 15 ex studenti romani provenienti dalle scuole del polo Sapienza, scelti in modo eterogeneo, che avevano da poco completato il percorso di liceo matematico, con l'obiettivo di raccogliere la loro percezione del quinquennio appena terminato. La disponibilità di tempo e il loro interesse nel condividere l'esperienza mi hanno permesso di adottare un approccio narrativo seppur strutturato, basato su interviste.

Le domande vertevano su: motivazione della scelta, aspettative, opinione sulla metodologia didattica, competenze acquisite, coinvolgimento del gruppo classe, ruolo dell'interdisciplinarietà, l'assenza di valutazione. Ho inviato il testo delle interviste tramite posta elettronica per garantire agli ex studenti un ambiente più rilassato che consentisse loro di esprimersi liberamente. Mediamente gli studenti intervistati restituiscono un'immagine positiva del liceo matematico, soprattutto per ciò che attiene alle competenze trasversali, non prettamente matematiche. Da una lettura globale dei testi raccolti emerge infatti che gli studenti ritengono di:

- aver acquisito competenze matematiche 'diverse' da quelle curriculari.
- aver acquisito competenze trasversali riuscendo così a pensare 'fuori dagli schemi',
- aver migliorato la capacità manuale,
- aver migliorato la capacità di lavorare in gruppo,
- aver acquisito la capacità di parlare in pubblico.

Alcuni di loro hanno evidenziato aspetti di criticità del progetto legati al più o meno interesse da parte del gruppo classe. Altri si sono concentrati sui contenuti, rappresentando il desiderio di aumentare percorsi che mettano 'a confronto argomenti scientifici con umanistici'. In rari casi la considerazione del percorso è stata messa in relazione (come vedremo nell'analisi della domanda 6) con la figura del docente, piuttosto che su altri aspetti.

8.3.1 I risultati relativi all'intervista

Per rispondere alla RQ2, ovvero 'Quali atteggiamenti verso la matematica, in termini di visione e senso di autoefficacia, emergono dagli studenti in relazione alla pratica del LM?' mi sono concentrata sull'analisi delle seguenti tre domande aperte, sempre secondo il costrutto TMA.

- Domanda 3 - Studente. Rifaresti questo tipo di percorso? E perché?
- Domanda 6- Studente. Ritieni che la didattica laboratoriale abbia migliorato le tue capacità di studio e di rielaborazione?
- Domanda 8- Studente. Ritieni che l'interdisciplinarietà abbia favorito l'apprendimento delle materie coinvolte?

Dalle risposte fornite alla domanda 3 si apprezza che tutti gli studenti esprimono soddisfazione per il percorso intrapreso. Ad esempio:

‘Mi è stato utile per capire che la matematica non è costituita solo da calcoli, come si può pensare in classe, soprattutto al classico, ma che in realtà è un mondo ricchissimo, vasto e complesso che si può apprezzare anche partendo da un approccio più umanistico’.

‘Mi ha aiutato a scoprire i legami della matematica con altre discipline e mi ha spinto anche a cercarli da sola, aprendo molto la mia mente’.

‘Mi ha aiutato nella comprensione di concetti che affrontavamo nel programma scolastico facendomi vedere la matematica non solo come numeri o formule da imparare’.

‘Ho applicato la matematica in ambiti diversi dal solito dove non pensavo nemmeno si potesse’.

‘Mi ha permesso di creare un forte legame sia con i docenti sia con i compagni e credo sia una cosa molto bella’.

Dalla domanda 8 emergono le considerazioni degli studenti relativamente all’interdisciplinarietà nel LM.

‘Scoprendo come la matematica si trovi in tutti gli ambiti disciplinari mi sono appassionato di più alla materia. Il coinvolgimento di professori di altre materie è stato sempre utile e stimolante.’

‘Credo che affrontare un argomento dalla prospettiva di diverse materie sia un ottimo modo per stimolarne l’apprendimento e renderlo più coinvolgente.’

‘Ha aumentato l’interesse per le altre materie.’

Le risposte degli studenti alle domande 3 e 8 restituiscono come la pratica del LM abbia contribuito a trasformare la loro percezione della matematica, ora vista come un mondo ricchissimo, non costituito solo da numeri e formule, interconnesso con altre discipline apparentemente distanti.

Dall’analisi della domanda 6 appare che la maggior parte degli studenti ha evidenziato apprezzamenti per la modalità laboratoriale del LM.

‘Le mie capacità di rielaborazione sono migliorate grazie alle attività laboratoriali del LM, ritengo che quelle di studio fossero già solide e perciò non influenzate né in senso positivo né in senso negativo’.

‘Grazie alla continua ricerca del perché un teorema, una legge o un semplice indovinello risultasse così, ho potuto sviluppare la mia capacità di mettere in discussione ciò che studio, non accontentandomi solo di una spiegazione superficiale.’

‘Ha contribuito alla formazione di un approccio critico nei confronti dello studio.’

'Seppur astratti, alcuni concetti della matematica hanno trovato pertinenti corrispettivi pratici, che ne hanno facilitato la comprensione e, di conseguenza, l'apprendimento. A volte invece portare l'astratto nel concreto può far perdere il concetto che si sta studiando di significato, questo è il limite di un approccio laboratoriale a mio avviso.'

'La didattica laboratoriale funziona solo se si è in grado di coinvolgere la classe nella sua totalità e di proporre la lezione come un'occasione di approfondimento e non di gioco'.

Le narrazioni riportate nella domanda 6 rivelano come la pratica del LM attraverso le attività laboratoriali abbia contribuito a migliorare il senso di autoefficacia da parte degli studenti. I termini più frequenti sono capacità di rielaborazione, approccio critico per esempio associati a miglioramento, sviluppo delle capacità. Gli studenti quindi manifestano un senso più alto di competenza percepita.

8.4 Considerazioni finali

L'analisi condotta su un campione di convenienza suggerisce una possibile correlazione positiva tra la visione, da parte dei docenti, della pratica didattica del Liceo Matematico e l'atteggiamento degli studenti verso la matematica, analizzato nelle componenti della loro visione e del loro senso di autoefficacia.

Una possibile interpretazione è che il LM, lavorando su attività focalizzate sui processi anziché sui prodotti, incida sulla visione che gli studenti hanno della matematica. Questa passa così da una visione strumentale, legata all'applicazione di meccanismi, a una più orientata allo sviluppo di processi di pensiero. La fiducia che gli studenti nutrono nelle proprie capacità di apprendere e affrontare la matematica ne risulta rafforzata, divenendo fondamentale per il successo percepito dagli studenti.

Dai vari testi esaminati, sia dei docenti sia degli studenti, tuttavia, non emerge in modo chiaro la consapevolezza che l'atteggiamento del docente, attraverso l'uso di metodologie laboratoriali o di approcci interdisciplinari, possa contribuire a modificare l'atteggiamento dello studente verso la disciplina. Si riscontra però, in modo netto, sia nei testi dei docenti sia in quelli degli studenti, l'associazione tra tipologia di contenuti e modalità di conduzione del lavoro in aula con un rinnovato approccio verso la matematica da parte degli studenti. Analizzando le narrazioni dei docenti, questo cambiamento di atteggiamento non sembra essere direttamente collegato, da parte loro, alla diversa visione della matematica che inevitabilmente trasmettono attraverso, ad esempio, contenuti interdisciplinari e/o metodologie laboratoriali. A volte si intravedono dei rimandi, come nel caso in cui i docenti fanno riferimento all'individualizzazione dei percorsi resa possibile dal LM, ma questi elementi non emergono mai in modo strutturato ed evidente.

In questo si individua una significativa opportunità formativa per i docenti del LM, che andrebbe concretizzata tramite una formazione specifica. Ritengo che la formazione, terzo aspetto fondante del LM, debba includere una riflessione da parte dei docenti sulla propria visione della matematica, sul senso di autoefficacia e, più in generale, sul proprio atteggiamento verso la matematica e il suo insegnamento. Il ruolo del docente del Liceo Matematico, infatti, va oltre la semplice trasmissione di contenuti: consiste nel progettare ambienti di apprendimento in cui gli studenti

possano esplorare autonomamente, lavorare in gruppo e proporre soluzioni. Il suo intervento in aula si limita ai momenti in cui è necessario o esplicitamente richiesto, diventando più visibile nella fase di discussione finale, volta a conferire senso e coerenza al lavoro svolto.

In questa prospettiva, il Liceo Matematico rappresenta una concreta opportunità per promuovere una progressiva evoluzione degli atteggiamenti degli studenti nei confronti della matematica, offrendo un'esperienza di apprendimento significativa e motivante, che dovrebbe essere sostenuta da un'attenzione consapevole da parte del docente alle componenti emotive, cognitive e alla visione complessiva della disciplina.

Capitolo 9

Conclusioni

L'opportunità di intraprendere un percorso di dottorato, da docente con una lunga esperienza di insegnamento, mi ha dato la possibilità di acquisire competenze, metodi e strumenti per riflettere sulla pratica didattica anche dalla prospettiva del ricercatore in didattica della matematica. Ha inoltre, rafforzato la mia consapevolezza del ruolo che lo sviluppo della dimensione storica deve rivestire nella didattica della matematica.

Nel corso della mia carriera di docente, ho seguito con interesse lo sviluppo di diverse sperimentazioni e proposte didattiche (e dei materiali che permettono di introdurle), che hanno toccato tanto contenuti disciplinari quanto modalità per trasmetterli. I risultati ottenuti, nella mia esperienza, non li ho visti tradursi tuttavia in pratica didattica diffusa.

L'incontro con il liceo matematico ha rappresentato, in questo, un punto di svolta, per la sua ambizione di lavorare su scala nazionale ad un'innovazione del curriculum, dimostrando la capacità di espandere il ventaglio di argomenti offerti alla didattica. L'aspetto organizzativo, il ruolo centrale del docente e i suoi principi fondativi—interdisciplinarietà, didattica laboratoriale e formazione attiva del docente—ne hanno garantito la solidità e una struttura che ha ben resistito agli anni di sperimentazione. E' una sperimentazione nata e cresciuta 'dal basso', voluta e inseguita fortemente dai docenti di scuola che quotidianamente si trovano a fronteggiare la pratica d'aula spesso difficilmente conciliabile con le indicazioni e gli spunti provenienti dalla ricerca sulla didattica della matematica. L'insegnamento in un liceo scientifico nel contesto del liceo matematico mi ha fatto riconoscere un'opportunità nella possibile integrazione interdisciplinare di latino e matematica, due discipline la cui storia si è intrecciata più volte nel corso del tempo. L'approccio storico alla didattica in questo caso scaturisce naturalmente ed è funzionale al riconoscimento dei nodi concettuali colti nel momento del loro apparire. Su questo tema ho costruito una parte importante della mia attività durante il dottorato che mi ha portato all'ideazione del workshop latino e matematica, realizzato in collaborazione con un team di ricercatori di latino e matematica afferenti a diverse università, e che ha visto la partecipazione di oltre cento docenti e studiosi. La grande adesione ha confermato la rilevanza di un esempio concreto di interdisciplinarietà, in grado di stimolare le nuove e necessarie pratiche didattiche, realizzando concretamente quella interdisciplinarietà che viene richiesta dalle Indicazioni Nazionali e che, nella mia

esperienza, si è dimostrata elusiva nella sua realizzazione nel contesto scolastico.

Anche qui, la dimensione organizzativa, il confronto tra docenti che vivono la scuola e la componente accademica e la conseguente costruzione di una comunità, si sono rilevati elementi chiave per il trasferimento di una idea in una concreta opportunità di innovazione didattica.

Maria Montessori (La mente del bambino, 1949), scriveva che 'la prima premessa per lo sviluppo del bambino è la concentrazione. Il bambino che si concentra è immensamente felice'. Adattandola al caso del liceo matematico, vorrei dire che in un ambiente di apprendimento ben organizzato e supportato dalla formazione continua dei suoi docenti, si può generare quel circolo virtuoso in cui la didattica si evolve e gli studenti - che devono rimanere sempre il centro delle nostre riflessioni didattiche - possono ritrovare quella fiducia e quel coinvolgimento che le pressioni esterne dei social media e della tecnologia stanno erodendo in maniera allarmante, in un contesto dove la velocità di sviluppo della tecnologia rischia di lasciare le nuove generazioni prive degli strumenti culturali per comprenderla e dominarla.

Durante questo dottorato, dal confronto con docenti e ricercatori, ho maturato la convinzione che una formazione adeguata del docente debba intervenire sia sulla competenza nella realizzazione concreta di percorsi didattici secondo un approccio storico ed interdisciplinare, sia sulla capacità di riflessione metadidattica, con particolare attenzione agli atteggiamenti degli studenti nei confronti della matematica e alle strategie per modificarli. Ritengo che questi due filoni di formazione siano centrali nel futuro del liceo matematico.

La costruzione di *community* dedicate (come nel caso del latino e della matematica) può rappresentare un contesto fertile per la formazione dei docenti in tali direzioni.

Concludo riportando quello che per me è da un lato un segno inequivoco della pressante richiesta di didattica nuova da parte anche delle famiglie e dall'altro la cifra di un successo costruito negli anni anche all'interno della comunità dei docenti che sono entrati a far parte di questo progetto: le richieste di iscrizione al liceo matematico nella scuola in cui insegno, in costante crescita dalla sua introduzione dieci anni fa, sono quest'anno giunte, nonostante quattro intere sezioni già dedicate al LM, al punto da aver saturato la capacità di accoglienza della nostra scuola, più che raddoppiando le richieste di un'altra pur popolare proposta, come il Cambridge.

Credo che il liceo matematico sia maturo per uscire dalla fase della sperimentazione ed entrare nel curriculum scolastico con il suo portato di innovazione didattica maturato in questi dieci anni di sperimentazione e di lavoro condiviso delle università, delle scuole e dei docenti che, insieme, ne hanno costruito il percorso.

Capitolo 10

Ringraziamenti

Il lavoro di ricerca riportato in questa tesi non sarebbe stato possibile senza l'incontro con le persone che ho avuto la fortuna di conoscere in questi anni.

Desidero esprimere innanzitutto la mia sincera gratitudine a Marta Menghini, con la quale ho iniziato a collaborare diversi anni fa nell'ambito delle attività del Liceo Matematico e sotto la cui guida ho condotto le mie ricerche durante il dottorato. È stata una guida attenta, solida e puntuale che mi ha sempre incoraggiata con generosità e fiducia. Un sentito ringraziamento va anche a Claudio Bernardi per avermi coinvolto nell'ambito della ricerca sull'efficacia del Liceo Matematico. Ringrazio, inoltre, entrambi per il supporto fondamentale che mi hanno offerto nella realizzazione della mia idea del *Workshop Latino Matematica*. Il progetto, che continuo a portare avanti con convinzione, ha dato vita a una comunità di lavoro con cui condividere riflessioni e sperimentazioni.

Un ringraziamento particolare va poi a Enrico Rogora, dai cui preziosi insegnamenti ho maturato una più profonda consapevolezza dell'impiego della storia nella didattica della matematica. I suoi consigli, il suo incoraggiamento, il tempo che mi ha dedicato e i numerosi spunti di riflessione che mi ha offerto sono stati importanti nello sviluppo di questo lavoro, in particolare nella progettazione e realizzazione del percorso sul concetto di covariazione a partire dall'algebra dei segmenti di Cartesio.

Un grazie sincero ad Annalisa Cusi per la disponibilità e le accurate indicazioni, che mi hanno consentito di effettuare l'analisi degli effetti dell'esperienza del Liceo Matematico, in particolare rispetto agli atteggiamenti sviluppati da docenti e studenti.

I mini-corsi di dottorato e i seminari di ricerca, da loro due promossi, rispettivamente in storia e in didattica della matematica, sono stati di grande stimolo e arricchimento. Tra i relatori dei mini-corsi, desidero ringraziare in particolare Paolo Freguglia, le cui lezioni sulla storia del calcolo delle variazioni hanno ispirato il mio lavoro sul problema della brachistocrona. La sua disponibilità nell'ascoltarmi e nell'indirizzarmi con sensibilità e competenza è stata preziosa.

Un ringraziamento speciale va a Maria Jennifer Falcone, latinista, e a Paolo d'Alessandro, filologo, senza la cui profonda competenza l'avventura del progetto *Latino e Matematica* non sarebbe stata possibile. Da loro ho imparato moltissimo, ricevendone un arricchimento, sia intellettuale sia umano, di grande valore.

Rivolgo un pensiero affettuoso anche a tutti i colleghi dottorandi e dottori di ricerca che ho incontrato durante questo percorso, per il dialogo ed il confronto costante, fonte preziosa di stimoli e riflessioni. Esprimo poi un sincero apprezzamento al Dipartimento di Matematica 'G. Castelnuovo' della Sapienza per avermi offerto, con il dottorato, un'opportunità unica di crescita professionale e personale.

Un pensiero riconoscente va, inoltre, a Francesco Saverio Tortoriello, ideatore del Liceo Matematico, cornice nella quale è nata e si è sviluppata una parte importante della mia ricerca.

Alle colleghe Piera Filippi e Loredana Morgante va la mia gratitudine per aver condotto insieme e con entusiasmo, attraverso un confronto stimolante e produttivo, la sperimentazione interdisciplinare sulla brachistocrona. Ringrazio altresì i colleghi Antonio Fanelli e Anna Perrotta che mi hanno generosamente offerto l'opportunità di sperimentare il percorso sulla covariazione nelle loro classi. Un grazie speciale va senza dubbio alla dirigente Francesca Ortenzi, che ha reso possibile tutto ciò con il suo sostegno.

Entrando in una sfera più personale, desidero ringraziare mio marito Alberto per avermi supportata in questi anni di studio e ricerca. La sua competenza, il suo amore e la disponibilità a riflettere con me, anche nelle ore più improbabili, sui "massimi e minimi sistemi" sono stati un sostegno indispensabile.

Un pensiero affettuoso va anche a mio figlio Giovanni, a Claudia e Tiziano, che, cogliendo il significato di questo impegno, hanno condiviso con leggerezza e partecipazione questi tre anni di ritorno allo studio accademico.

Infine, ma non per importanza, il mio più sentito ringraziamento va a tutti i miei studenti. Questo lavoro è per loro: sono stati la mia più autentica fonte d'ispirazione, spingendomi ogni giorno a ripensare il senso dell'insegnamento e a cercare strade nuove per renderlo più significativo.

Bibliografia

- Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research*, 81, 132–169.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45 n.6.
- Arzarello, F., Robutti, O., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2-3), 189–207.
- Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., Martignone, F., Robutti, O., & Sabena, C. (2012). Vent'anni dopo: Pisa 1991 – Rimini 2012. Dalla ricerca in didattica della matematica alla ricerca sulla formazione degli insegnanti. *XXIX Seminario Nazionale in Didattica della Matematica 2012*.
- Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: a theoretical model for teacher education programmes. In A. Clark-Wilson et al. (eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era, 347 Mathematics Education in the Digital Era 2*, DOI 10.1007/978-94-007-4638-1 15, Springer Science+Business Media Dordrecht 2014, 347–372.
- Ball, D. L., Thames, M. H., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J., & Phelps, G. (2009). A Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Cur.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 95–98). PME.
- Barozzi, G. C., & Ciarrapico, L. (2003). Il piano nazionale per l'informatica [Accesso online]. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 6-A(3), 441–461. http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_3_441_0
- Barrow, L. H. (2006). A brief history of inquiry: From Dewey to standards. *Journal of Science Teacher Education*, 17, 265–278.
- Bernardi, C., Gambini, A., Gubbiotti, S., Coppa, F., Ferretti, F., Mammana, M. F., Passaro, D., Tortoriello, F. S., & Tovenà, F. (2024). L'“efficacia” del Liceo Matematico: evidenze dalle prove INVALSI. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*.
- Bernardi, C., Gambini, A., Gubbiotti, S., Massotti, G., & Passaro, D. (2022). Indagine nazionale sui Licei Matematici: analisi dell'esperienza sul campo dei docenti coinvolti, primi bilanci e potenziali sviluppi. *Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie I*, 7(1), 69–85.
- Bernoulli, J. (1697a). Solutio problematum fraternorum [...] *Acta Eruditorum*, 211–217.

- Bernoulli, J. (1744). *Jacobi Bernoulli, Basilensis, Opera* (J. Bernoulli, Cur.; Vol. 2) [Tomus secundus]. Cramer, Heredes & Philibert, Fratres.
- Bernoulli, J. (1697b). Curvatura radii [...], Propositi, de [...] *Acta Eruditorum*, 206–211.
- Boero, P., Douek, N., & Ferrari, L. P. (2008). Developing theorems in a classroom context: A study of the dynamics of proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 159–177. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9122-0>
- Boix Mansilla, V. (2002). Interdisciplinary Work at the Frontier, An empirical examination of expert interdisciplinary epistemologies. *Issues in Integrative Studies*.
- Boix Mansilla, V. (2005). Interdisciplinary learning: A core principle for school reform. *Harvard Education Press*.
- Boix Mansilla, V. (2016). Interdisciplinary Learning: A cognitive-epistemological foundation. *Frodeman, R. Klein J. Ed.. Oxford Handbook of Interdisciplinarity. Second edition UK: Oxford University Press*.
- Brocca, C. (1991). *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni* [Studi e documenti deli annali della Pubblica Istruzione 56, Le proposte della Commissione Brocca]. Stabilimenti Tipografici "E. Ariani" e "L'Arte della Stampa" della S.p.A. Armando Paoletti.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In *W. Wanhamme & J. Wanhamme (Eds.)*
- Brousseau, G. (1997). Epistemological Obstacles, Problems, and Didactical Engineering. In *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (pp. 79–117). Springer Netherlands.
- Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). The BSCS 5E Instructional Model: Origins and Effectiveness. *Biological Sciences Curriculum Study (BSCS)*.
- Cai, J. (2010). Commentary on problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics: A representational discussion. In B. Sriraman & L. English (Cur.), *Theories of mathematics education* (pp. 251–258). Springer.
- Calvino, I. (1968). *L'approdo letterario*. Edizioni Radio Italiana.
- Capone, R., Rogora, E., & Tortoriello, F. S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 3, 293–304.
- Chevallard, Y. (1985). *Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–226.
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: An Attempt at a Principled Approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71–114. <https://matedu.hiroshima-u.ac.jp/mcp/hjme.html>
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Kim, S. (2015). What is a theory according to the anthropological theory of the didactic? *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2614–2623. <https://hal.science/hal-01289424v1/document>

- Ciani, A., Ferretti, F., Lemmo, A., Maffia, A., & Provitera, C. (2019). L'autoefficacia e le emozioni verso la matematica dei futuri insegnanti di scuola dell'infanzia e primaria. *Ricerche di Pedagogia e Didattica – Journal of Theories and Research in Education*, 14(3).
- Clark, K. (2019). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. *ZDM – Mathematics Education*.
- Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2022). Recent developments in integrating history of mathematics in mathematics education: Empirical, methodological and theoretical reflections. *ZDM – Mathematics Education*, 54, 1–16.
- Coppa, F., & Filippi, P. (2024a). Il latino della scienza Galilei e i fratelli Bernoulli in uno studio interdisciplinare sulla brachistocrona. *Science & Philosophy*.
- Coppa, F., & Filippi, P. (2024b). Il problema della Brachistocrona in un percorso interdisciplinare tra latino e matematica. *Periodico di Matematica, supplemento al n. 3, settembre*.
- Coppa, F., & Filippi, P. (2025). *Problema novum ad cuius solutionem mathematici invitantur*: la sfida di Johann Bernoulli (con un 'ospite impossibile'). Un percorso interdisciplinare tra latino e matematica per il liceo matematico. In F. Coppa, P. d'Alessandro & M. J. Falcone (Cur.), *Atti del Workshop di Roma, 15–16 Dicembre 2023: Matematica e Latino* (pp. 250–261). Res Publica Litterarum, Roma Tre Press.
- Coppa, F., & Palma, A. (2023a). Dall'algebra dei segmenti di Cartesio al concetto di funzione. Il laboratorio didattico. In I. con la Matematica XXXVII (Cur.), *Riflettere sulla didattica della matematica per insegnare: ricerche ed esperienze*.
- Coppa, F., & Palma, A. (2023b). Un laboratorio didattico per il concetto di funzione attraverso l'algebra dei segmenti di Cartesio. In P. di Matematica per l'insegnamento secondario (Cur.), *III Convegno Matematica, Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana (Agerola)*.
- Coppa, F., & Palma, A. (2023c). Un percorso didattico verso il concetto di funzione a partire dalle costruzioni con riga e compasso ispirato alla storia. *XXII Congresso Società Italiana di Storia delle Matematiche: Matematica e architettura. La matematica a Roma dopo l'Unità (Roma)*.
- Courant, R., & John, F. (1999). *Introduction to Calculus and Analysis, Volume I*. Springer.
- Creemers, B. P. M. (1994). *The Effective Classroom*. Cassell.
- Creemers, B. P. M., & Kyriakides, L. (2008). *The Dynamics of Educational Effectiveness: A Contribution to Policy, Practice and Theory in Contemporary Schools*. Routledge.
- Cusi, A., Robutti, O., Panero, M., Taranto, E., & Aldon, G. (2023). Meta-Didactical Transposition.2: the evolution of a framework to analyse teachers' collaborative work with researchers in technological settings. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Cur.), *Mathematics Teacher in the Digital Era – 2nd Edition*. Springer.
- Cusi, A., & Malara, N. A. (2016). The Intertwining of Theory and Practice: Influences on Ways of Teaching and Teachers' Education. In L. D. English & D. Kirsh-

- ner (Cur.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 19–35). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203448946-25>
- D'Amore, B. (2023). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bonomo Editore.
- De Angelis, A. (2021). *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze di Galileo Galilei*. Torino.
- de Monferrier, A. S., Gasbarri, G., & François, G. (1838–1849). *Dizionario delle scienze matematiche pure ed applicate* (G. F. A.A.V. Sarrazin de Monferrier G. Gasbarri, Cur.). Battelli.
- Descartes, R. (1637). *La Géométrie*.
- Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Holt.
- Di Martino, P. (2013). The role of teachers in shaping students' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 84(2), 145–156.
- Di Martino, P., & Sabena, C. (2011). Elementary Pre-service Teachers' Emotions: Shadows from the Past to the Future. *Research in Mathematics Education*, 13(2), 207–221. <https://doi.org/10.1080/14794802.2011.596957>
- Di Martino, P., & Zan, R. (2010). “Me and maths”: toward a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teachers Education*, 13(1), 27–48.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2011a). Attitude and anxiety in mathematics: two sides of the same coin? *Research in Mathematics Education*, 13(2), 137–149. <https://doi.org/10.1080/14794802.2011.585825>
- Di Martino, P., & Zan, R. (2011b). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM Mathematics Education*.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2014). The Construct of Attitude in Mathematics Education. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Cur.), *From Beliefs to Dynamic Affect Systems in Mathematics Education* (pp. 3–18). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4_3
- Di Martino, P. (2007). L'atteggiamento verso la matematica: alcune riflessioni sul tema. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 30AB, 651–666.
- Dunker, K. (1969). *La psicologia del pensiero produttivo*. Giunti Barbera.
- Duval, R. (1991). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 25–48.
- Eagly, A. H., & Chaiken, S. (1998). Attitude Structure and Function. In D. T. Gilbert, S. T. Fiske & G. Lindzey (Cur.), *The Handbook of Social Psychology* (4th, pp. 269–322). McGraw-Hill.
- Elgin, C. Z. (1996). *Considered judgment*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(3), 139–162.
- Freguglia, P., & Giaquinta, M. (2016). *The early period of the Calculus of Variations*. Birkhäuser.
- Freguglia, P., & Giaquinta, M. (2020). *Intorno all'idea matematica di curva. Una introduzione storica*. Pitagora.
- Freudenthal, H. (1983). The implicit philosophy of mathematics history and education. *In Atti dell'ICMI Varsavia*, 469.

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education – China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science and Education*, 10, 391–408.
- Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631–654.
- Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Elzevirii.
- Galilei, G. (1958). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (A. Carugo & L. Geymonat, Cur.). Torino.
- Galilei, G. (1990). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (E. Giusti, Cur.). Einaudi.
- Galilei, G. (1890–1907). *Le opere di Galileo Galilei: edizione nazionale* (A. Favaro, Cur.; Vol. 8). Barbera Editore.
- Galluzzi, P. (1979). *Momento. Studi galileiani*. Edizioni dell'Ateneo Bizzarri.
- Gardner, H. (2006). *Five Minds for the Future*. Cambridge: Harvard Business School Press.
- Giaquinta, M. (2014a). *La forma delle cose*. Edizioni di Storia e Letteratura.
- Giaquinta, M. (2014b). *La forma delle cose. Idee e metodi in matematica tra storia e filosofia, vol. II: Il calcolo da Leibniz e Newton a Eulero e Lagrange e un po' oltre*. Edizioni di Storia e Letteratura.
- Giusti, E. (1981). Aspetti matematici della cinematica galileiana. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 1(2), 3–42.
- Giusti, E. (1993). *Euclides Reformatus: La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*. Bollati Boringhieri.
- Giusti, E. (2007). *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*. Ist. Editoriali e Poligrafici.
- Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1976). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Aldine Publishing Company.
- Goldstine, H. H. (1980). *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Springer Verlag.
- Goodman, N., & Elgin, C. Z. (1988). *Reconceptions in Philosophy and Other Arts and Sciences*. Hackett Publishing Company, Inc.
- Grugnetti, L., Rogers, L., Carvalho Silva, J., Daniel, C., Coray, D., de Guzman, M., Gispert, H., Ismael, A., Jones, L., Menghini, M., Philippou, G., Radford, L., Rottoli, E., Taimina, D., Troy, W., & Vasco, C. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. *History in Mathematics Education: The ICMI Study 2002*, 6, 39–62.
- Harlen, W. (2010). Principles and big ideas of science education. *Hatfield, Herts: Association for Science Education*. <http://www.ase.org.uk>, 5.
- Harlen, W. (2012). Inquiry in science education [Accessed 4 Apr 2013]. In S. Borda Carulla (Cur.), *Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school*. <http://www.fibonacci-project.eu>

- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., et al. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, 25(4), 12–21.
- Imperi, N., & Rogora, E. (2022). Introdurre la nozione di funzione con l'algebra dei segmenti di Cartesio. *La matematica e la sua didattica*, 30, 33–52.
- Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., Idrissi, A. E., da Silva, C. M. S., & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In John Fauvel, Jan van Maanen (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study*, 291–328.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educ Stud Math Springer Science*.
- Jaworski, B. (1998). *Mathematics Teacher Research: Process, Practice and the Development of Teaching*. Falmer Press.
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 187–211.
- Jaworski, B. (2008a). Grappling with complexity: Co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. In *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education*. Bergen University College, 1, 17–36.
- Jaworski, B. (2008b). *Mathematics Teacher Research: Process, Practice and the Development of Teaching*. Sense Publishers.
- Johnson, E. J., & Holubec, E. J. (1986). *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom*. Interaction Book Company.
- Katz, V. (2004). Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics. *Mathematical Association of America*, 1–7.
- Klein, J. T. (2010). *Creating interdisciplinary campus cultures: A model for strengthening interdisciplinary scholarship*. Jossey-Bass.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books.
- Leatham, K. R. (2006). Viewing Mathematics Teachers' Beliefs as Sensible Systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 91–102. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-9006-8>
- Lombardo Radice, L., & Segre, B. (1967). Galileo e la matematica [Manifestazioni celebrative del IV centenario della nascita]. In *Saggi su Galileo*. Barbera.
- Maraschini, W., & Palma, M. (2013). *Enciclopedia della matematica Le Garzantine* (W. Maraschini & M. Palma, Cur.). Garzanti.
- Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 243–267.
- Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness, and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. in T. Wood (series ed.) and B. Jaworski (vol. ed.), *international handbook of mathematics teacher education*, 4, 31–56.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Cur.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575–596). Macmillan.

- Menghini, M. (1989). Dopo una conversazione con H. G. Steiner. *Epsilon*, 4, 20–23.
- Migliorini, B. (1948). *Lingua e cultura*. Tumminelli.
- Minello, R. (2012). Educational Effectiveness Research e politiche educative. L'evoluzione del quadro teorico. *Formazione & Insegnamento*, X-2.
- Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2019). Paradidactic infrastructure for sharing and documenting mathematics teacher knowledge: A case study of 'practice research' in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(3), 281–303. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9394-y>
- Morin, E. (1999). *La testa ben fatta: Riforma dell'insegnamento e del pensiero*. Raffaello Cortina Editore.
- National Research Council. (1996). *National science education standards*. National Academy Press.
- Ogbom, J., Koulaidis, V., & Papadopetrakis, E. (1996). We measured the Earth by telephone. *SSR Science Notes*, 87–90.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 307–332.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. Basic Books.
- Parthasarathy, R. (2008). Refraction [Page 26].
- Piaget, J. (1950). *The Psychology of Intelligence*. Routledge.
- Polya, G. (1945). *How to Solve it*. Princeton University Press.
- Prodromou, T., Robutti, O., & Panero, M. (2018). Making Sense Out of the Emerging Complexity Inherent in Professional Development in Mathematics Education. *Mathematics Education Research Journal*, 30, 445–473. <https://doi.org/10.1007/s13394-018-0249-1>
- Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working Papers in Urban Language and Literacies*, 10, 23–47.
- Radford, L., Bussi, M. G. B., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J.-L., Katz, V., Rogers, L., Sierpinska, A., & Vasco, C. (2002). Historical formation and student understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. V. Maanen (Cur.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers.
- Robutti, O. (2020). Meta-Didactical Transposition. In S. Lerman (Cur.), *Encyclopedia of Mathematical Education* (pp. 611–619). Springer.
- Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe* [Rapport officiel]. Commission Européenne, Direction générale de la recherche, Science, économie et société.
- Rogers, L. (1993). The assessment of mathematics: society, institutions, teachers and students. *Didactics of mathematics, Erasmus ICP-92-G-201*, 1/11, 603–613.
- Rogora, E. (2016). Lezione XX, 16 maggio 2016. Appunti per il corso Matematiche complementari.
- Rogora, E., & Tortoriello, F. S. (2018). Matematica e cultura umanistica. *Archimede*.
- Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(1), 1–55.

- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Concepts: Reflection on Processes and Objects. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Shimizu, Y., & Vithal, R. (c. d. (2023). *Mathematics Curriculum Reforms around the World. The 24th ICMI Study*. Springer.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, (77), 20–26.
- Stillwell, J. (2020). *The Four Pillars of Geometry*. Springer Nature.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Taranto, E., Arzarello, F., & Robutti, O. (2017). Repository di strategie e metodologie didattiche in Matematica. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*.
- Tombolato, M. (2016). Il costrutto di ostacolo epistemologico per un'interpretazione in chiave didattica del rapporto fra conoscenza ingenua e conoscenza formale in fisica [Aprile 2016]. *Volume 2, Numero 1*.
- Tzanakis, C. (2000). Presenting the relation between mathematics and physics on the basis of their history: A genetic approach. In V.Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics-an international perspective, MAA notes*, 51, 111–120.
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. in J. Fauvel and J. van Maanen (Eds), *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 7, 201–240.
- Veyne, P. (1971). *Comment on écrit l'histoire: essai d'épistémologie*. Paris: Le Seuil.
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on Technology in Mathematics Education: A Perspective of Constructs. In F. K. Lester (Cur.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169–1207). National Council of Teachers of Mathematics.