

INCONTRI CON LA MATEMATICA

For ATH Project

CONVEGNO NAZIONALE
INCONTRI CON LA MATEMATICA n.40

I PONTI DI KÖNIGSBERG: UN PROBLEMA IMPOSSIBILE PER IMPARARE AD ARGOMENTARE

LUIGI BERNARDI & BENEDETTA DAMIANO



Contesto: classe IV scuola primaria, 8 ore (3 incontri)

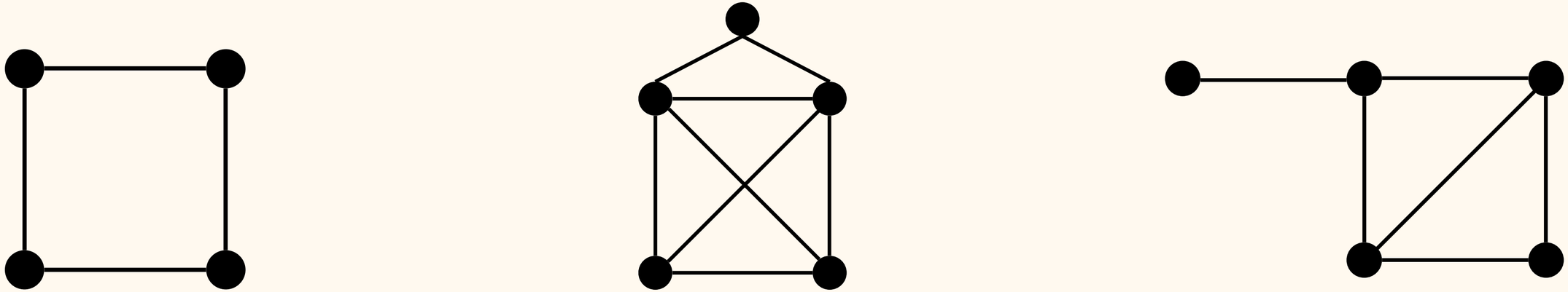
argomento matematico
GRAFI EULERIANI

strumento digitale
KONI GAME

scelta metodologica
PROBLEMI IMPOSSIBILI
D'Amore and Sandri (1993)
Bagni (2001)

COS’È UN GRAFO?

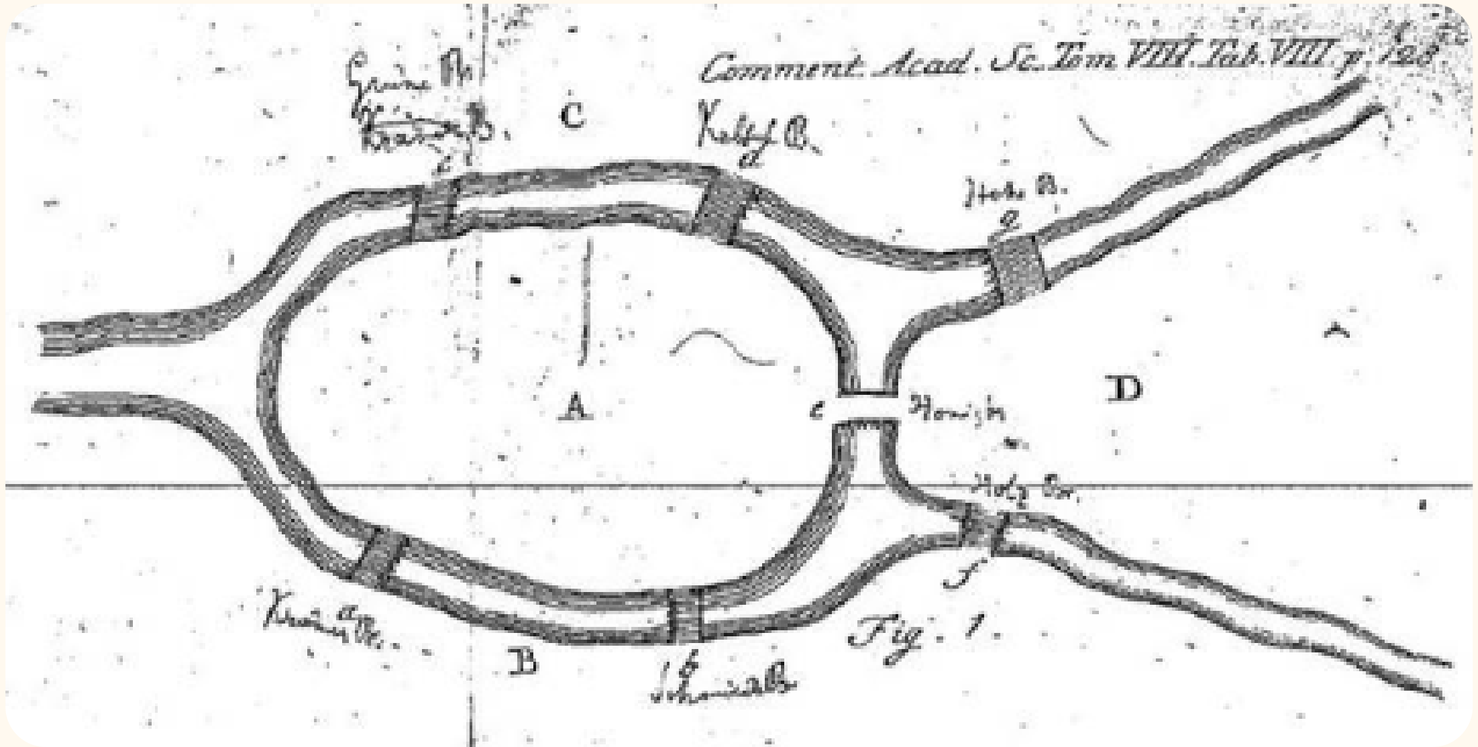
Un grafo consiste in due insiemi: un insieme finito di punti, chiamati **vertici**, e un insieme di linee che connettono i vertici, chiamate **archi**.

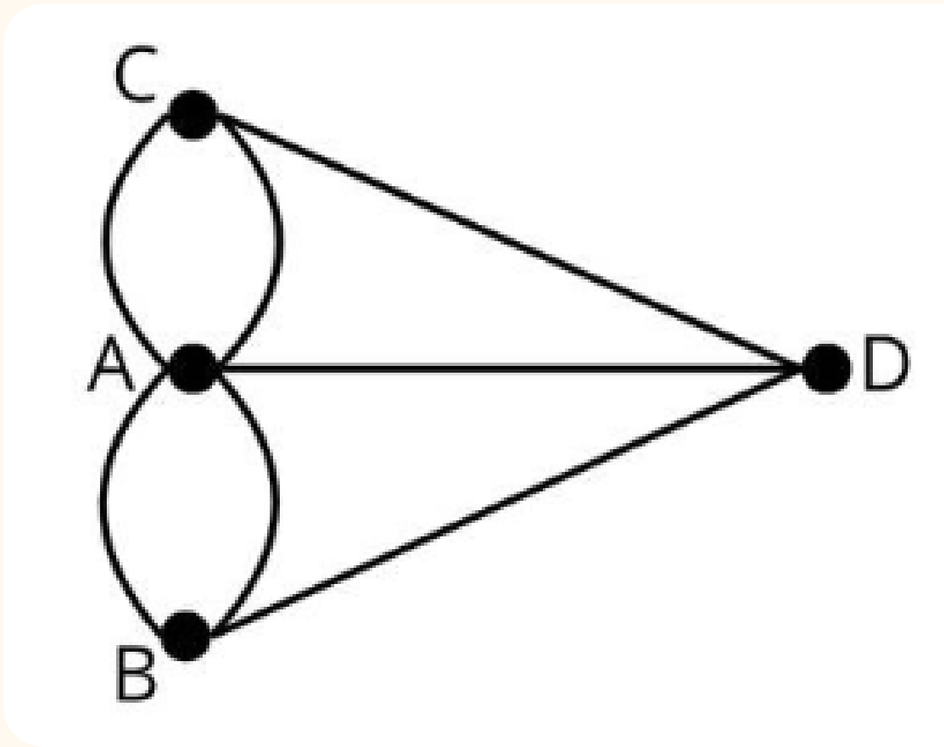


- Un grafo è **euleriano** se, con un cammino, si possono percorrere tutti gli archi del grafo *una e una sola volta* (cioè senza passare mai due volte sullo stesso arco), **a partire da qualunque suo vertice**.
- Un grafo è **semi-euleriano** se ciò è vero solo per alcuni dei suoi vertici, ma non tutti.

La genesi storica di questo tipo di problemi: Eulero e i ponti di Königsberg

Secondo un noto aneddoto, gli abitanti della città di Königsberg si chiedevano se fosse possibile compiere un percorso attraversando ciascuno dei sette ponti della loro città **una sola volta**.
Eulero, nel 1736, dimostrò che un simile percorso non esiste.





Mi fu proposto un problema riguardante un'isola nella città di Königsberg, circondata da un fiume collegato da sette ponti, e mi si chiese se qualcuno potesse percorrere i singoli ponti in una passeggiata continua in modo tale che ciascun ponte fosse attraversato una sola volta. Mi fu riferito che finora nessuno aveva dimostrato la possibilità di farlo, né aveva mostrato che ciò è impossibile. Questa questione è così banale, ma mi parve degna di attenzione in quanto né la geometria, né l'algebra, né nemmeno l'arte del contare (ars combinatoria) erano sufficienti a risolverla. In vista di ciò, mi venne in mente di domandarmi se essa appartenesse alla geometria delle posizioni (geometria situs), che Leibniz aveva un tempo tanto ardentemente desiderato. E così, dopo qualche riflessione, ottenni una regola semplice, ma del tutto certa, grazie alla quale si può decidere immediatamente, per tutti gli esempi di questo genere, con qualsiasi numero di ponti e in qualunque disposizione, se un tale giro sia possibile oppure no.

(*Lettera del 1736 indirizzata a Giovanni Marinoni*)

L’ATTIVITÀ IN CLASSE

EULERO, IL VIAGGIATORE

C'era una volta un viaggiatore di nome Eulero che amava scoprire posti nuovi e camminare per città lontane.





Durante un suo viaggio nell'antica Prussia, arrivò nella città di Königsberg. La città era attraversata dal grande fiume Pregel, con due isole al centro.

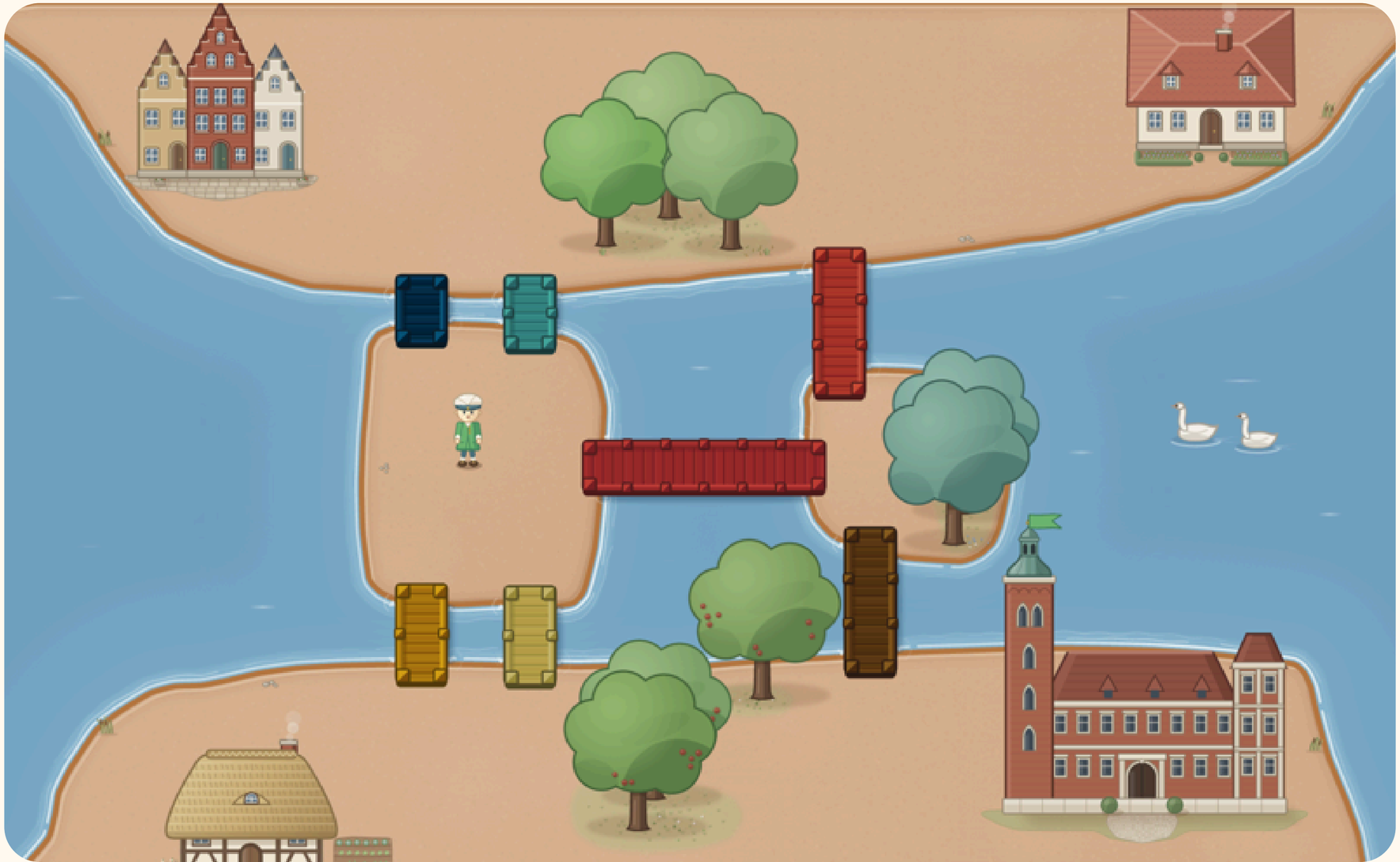
Le parti della città erano connesse fra loro da sette bellissimi ponti. Eulero decise dunque di visitare tutti i ponti, uno dopo l'altro.
Per lui "visitare un ponte" voleva dire percorrerlo tutto, da una sponda fino all'altra.

Ma la città aveva un segreto: quei ponti erano magici! Infatti, appena si attraversava un ponte, il ponte… *scompariva*!

Aiuta Eulero a visitare tutti i ponti! Continua su www.oiler.education/koni-game

KONI GAME

GIOCO GRAFI EULERIANI



L’ansia del fallimento

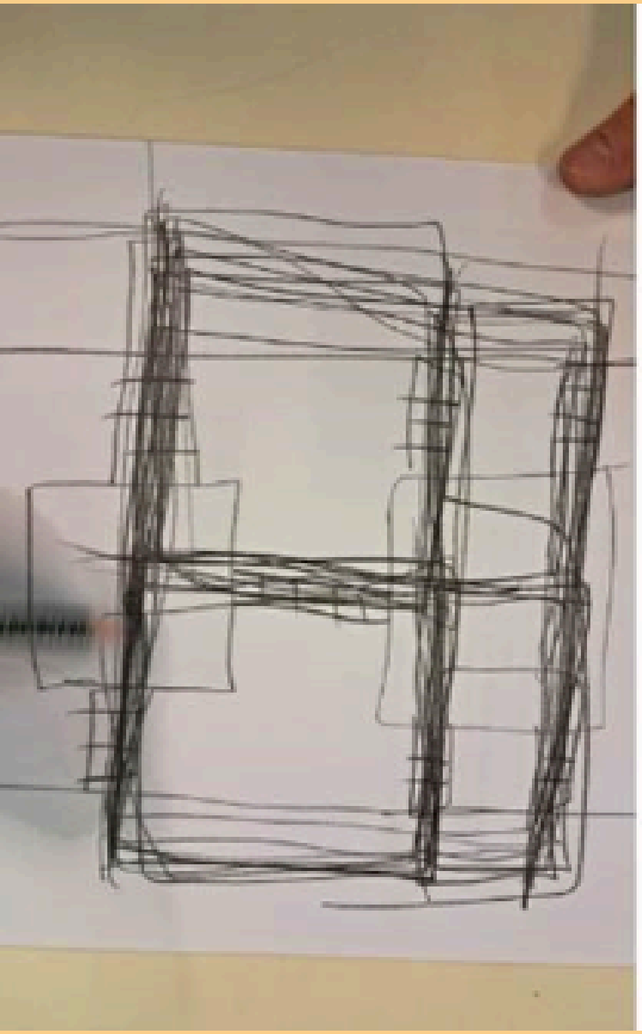
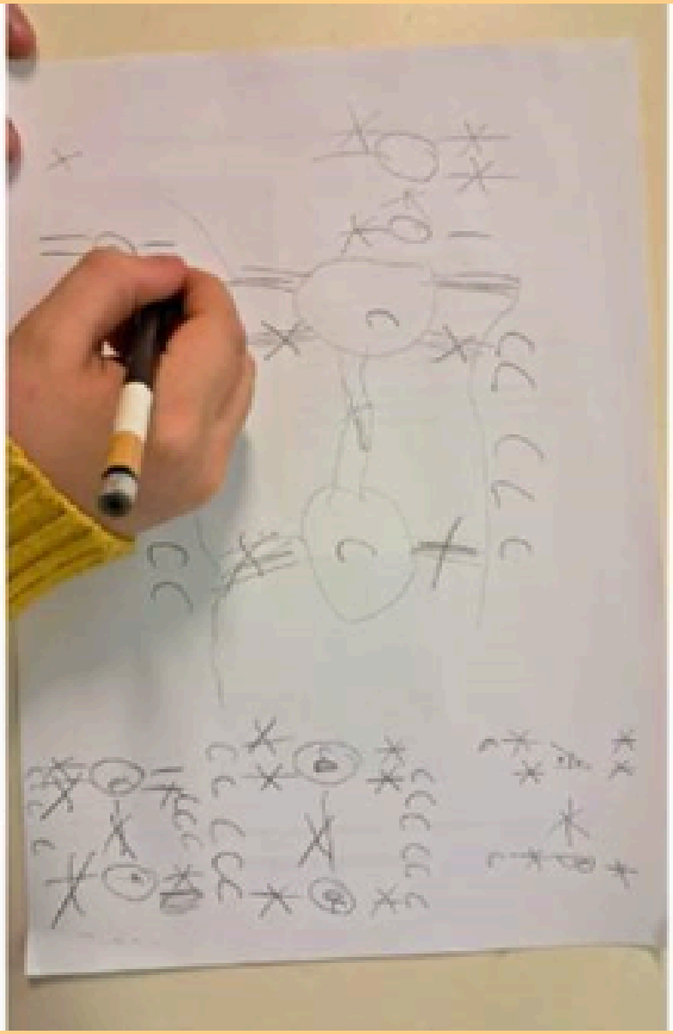
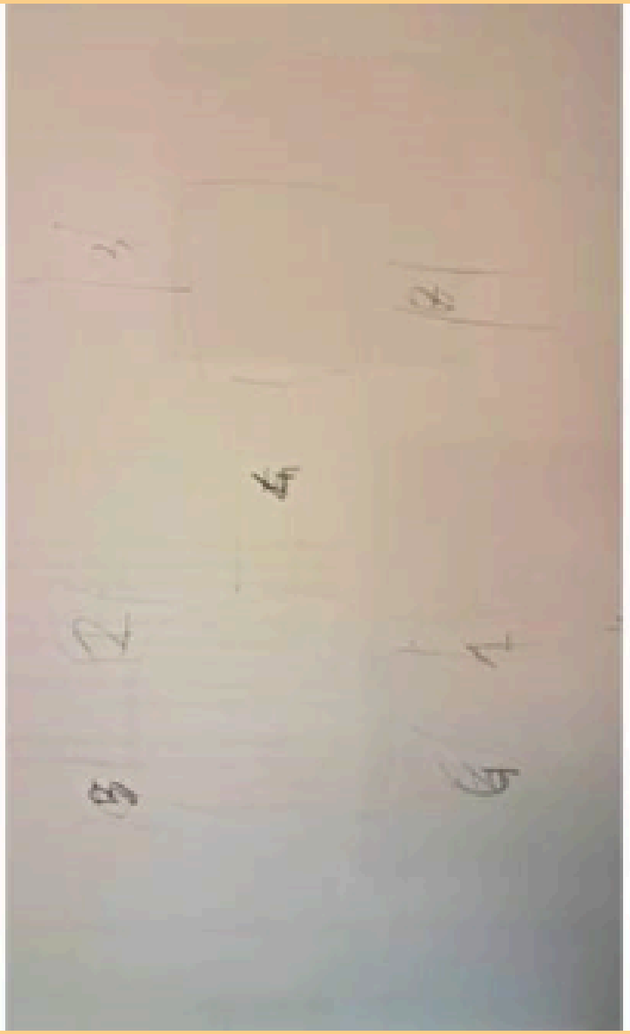
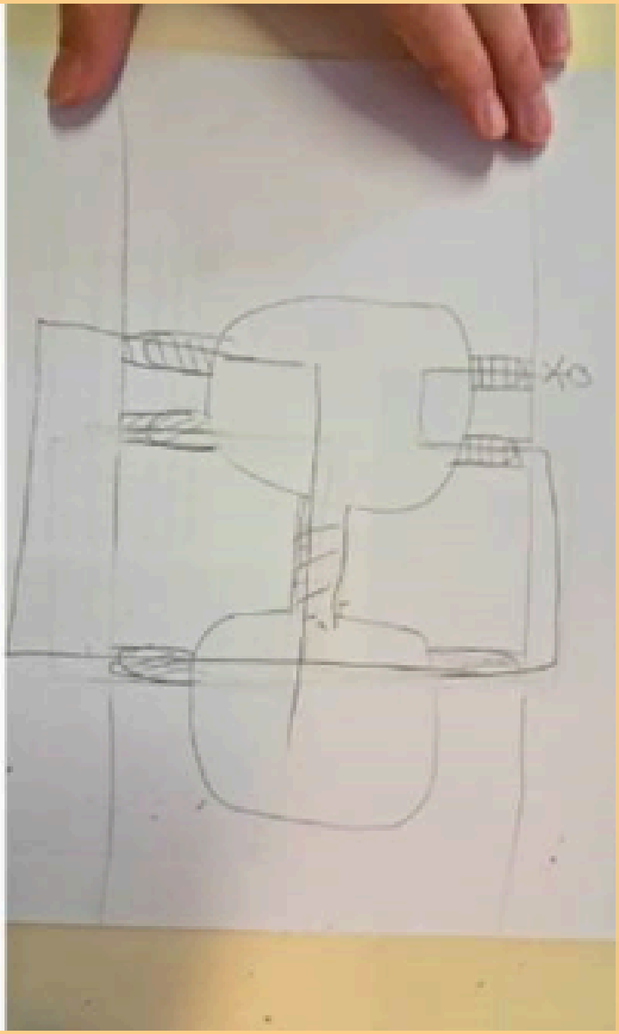
Studentesse e studenti si mostravano entusiati e tolleravano il fallimento.
Due fattori possono spiegare questa disponibilità:

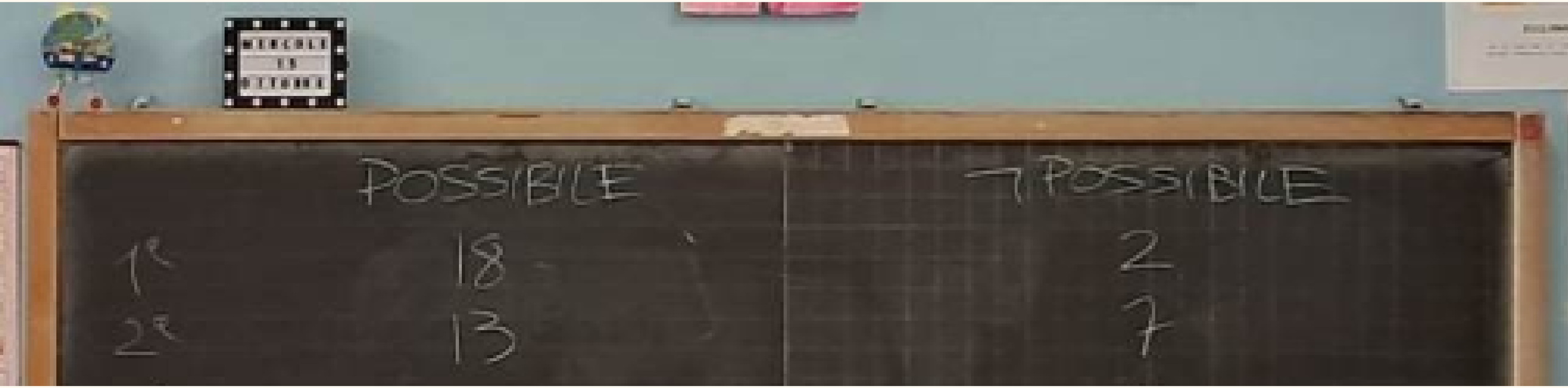
- Cambio frequente di giocatore, che manteneva concentrata la classe, e in generale l’uso di un gioco online.
- Il fatto che nessuno riuscisse a risolvere il gioco. In altri termini, la scelta pedagogica del problema impossibile sembra aver ridotto l'ansia.

Possibilisti *vs* impossibilisti

La classe era divisa fra chi riteneva che il problema fosse risolvibile (ma la soluzione non fosse ancora stata trovata) e chi riteneva che il problema non fosse risolvibile.




MERCOLEDÌ
13
OTTOBRE
POSSIBILE
1ª 18
2ª 13
POSSIBILE
2
7

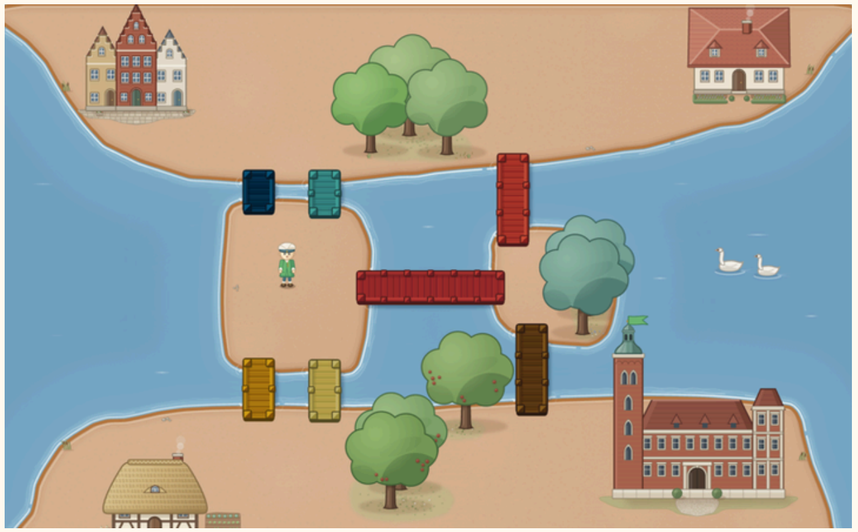
Possibilisti *vs* impossibilisti: i gruppi di lavoro





Dialogo fra impossibilisti

Studente A: Secondo me sarebbe possibile solo se ci fossero due ponti orizzontali [aggiungendo un secondo ponte fra le due isole, accanto a quello orizzontale].
Studente B: Esatto, così funzionerebbe!
Studente C: Così puoi andare avanti e indietro.
Studente D: Però forse è impossibile anche perché i numeri sono dispari [riferendosi al numero di ponti].



Possibilisti *vs* impossibilisti: le delegazioni

Studente A (*i*): Secondo me è impossibile perché i numeri sono comunque dispari. Se togliessi questo ponte allora si potrebbe risolvere. Però in teoria con tutti dispari non si può fare.
Studente B (*p*): Io dico che teoricamente questo deve essere l'ultimo [indica un ponte]. Perché poi... e questo è il penultimo.
Studente A (*i*): Comunque anche se *spawni* sui ponti non cambia niente, spariscono lo stesso.
Studente B (*p*): Sì, però dico che questo deve essere l'ultimo, perché poi se questo è l'ultimo vai qui. Se questo è l'ultimo e questo il penultimo, vai così, così, così.
Studente A (*i*): Sì, però questo l'hai già attraversato due volte.

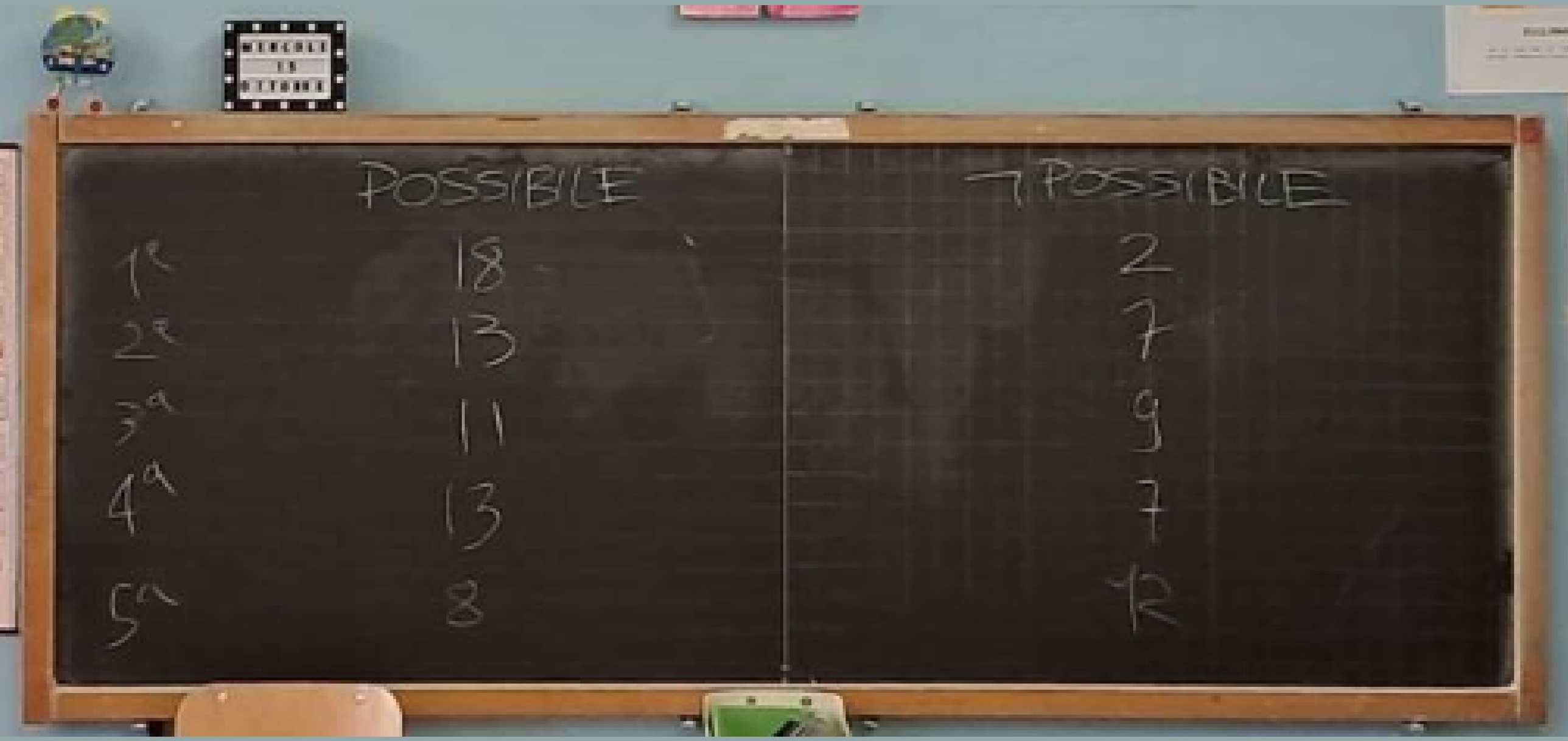

OILER
SCUOLA
CASA
LUI
ENGLISH
GIOCO GRAFI EULERIANI


OILER
SCUOLA
CASA
LUI
ENGLISH
GIOCO GRAFI EULERIANI

Possibilisti *vs* impossibilisti: le delegazioni II

Studente A (*i*): Come vedi, ogni singola soluzione non è fattibile. Anche se vieni da qui e fai così, puoi andare di qua e di là, ma questo rimane…
Studente B (*i*): È impossibile dalla rappresentazione.
Studente C (*p*): **Non siete convincenti!**

Studente A (*p*): Sì, ma posso dire una cosa? Questa è una soluzione [probabilmente intende «possibilità»].
Studente B (*p*): Una su centomila!


POSSIBLE
1ª 18
2ª 13
3ª 11
4ª 13
5ª 8
POSSIBLE
2
7
9
7
R

Argomentare in classe

I PRO

La scelta di un problema impossibile sembra aver fatto nascere il reale bisogno di convincere gli altri della propria ipotesi.

Sostenere e giustificare le proprie posizioni non è semplice, specie se non c'è una procedura condivisa con la classe per dimostrare che la propria ipotesi è corretta.
Decade l'idea della matematica come certezza procedurale a cui gli alunni (e insegnanti!) sono a volte abituati.
Le modalità di argomentazione erano spontanee e interessanti.

GLI OSTACOLI

Difficile staccarsi dall'insegnante come figura di riferimento, che stabilisce cosa sia giusto e cosa sbagliato.
Quando parlavano con tutta la classe, gli studenti guardavano noi, e noi li invitavamo a parlare con gli altri, a rispondere a chi aveva fatto la precedente affermazione, o anche semplicemente a guardarsi negli occhi.

LA SCHEMATIZZAZIONE

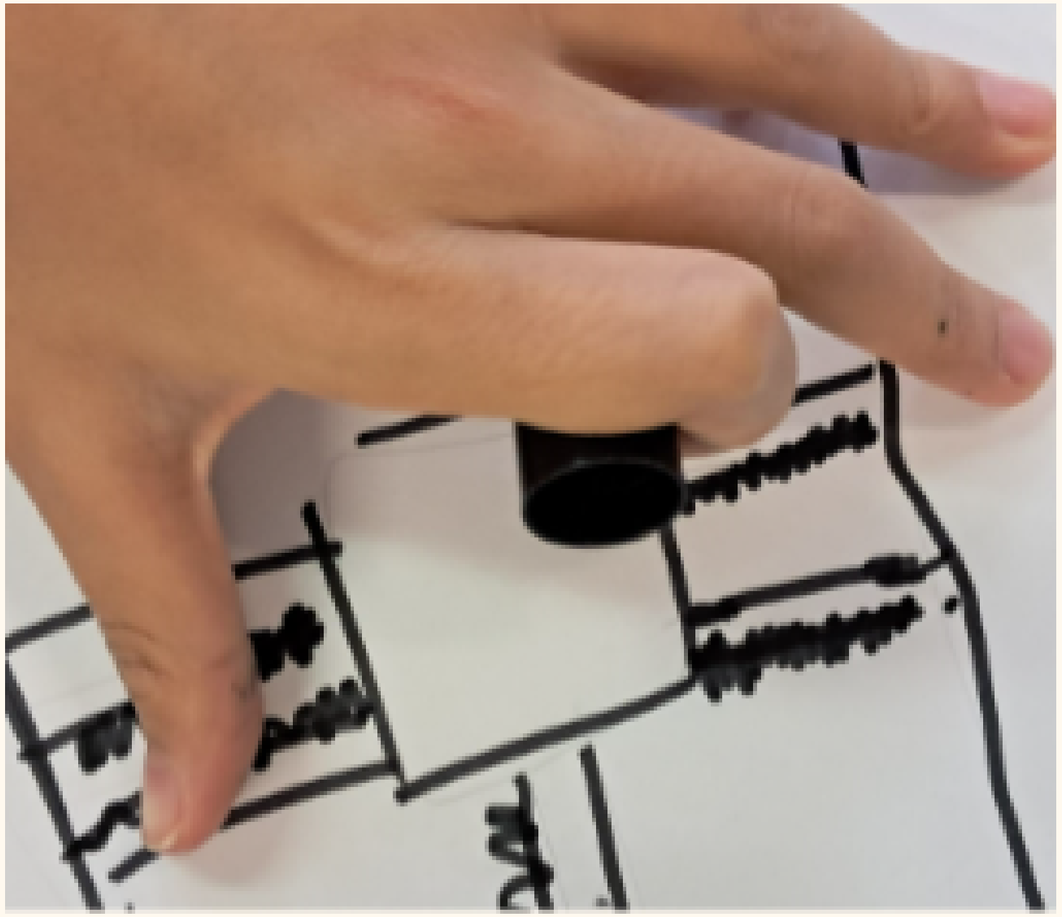
Dato che la situazione rimaneva stabile tra i due gruppi, abbiamo scelto di andare oltre ed esplorare gli altri livelli.

Prima, però, **abbiamo chiesto agli alunni di schematizzare la mappa della città di Königsberg**, lasciandone sono gli elementi essenziali.

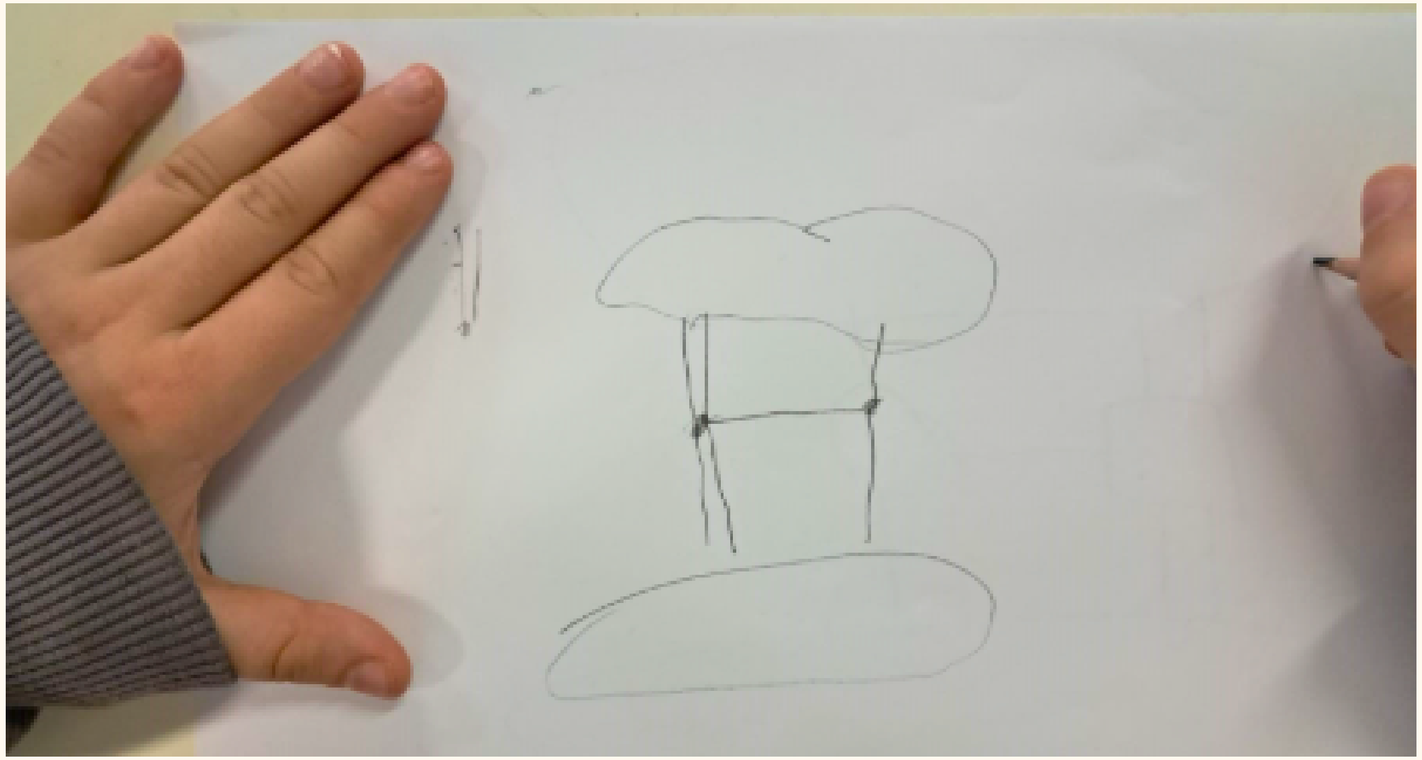
Cosa hanno fatto gli studenti?

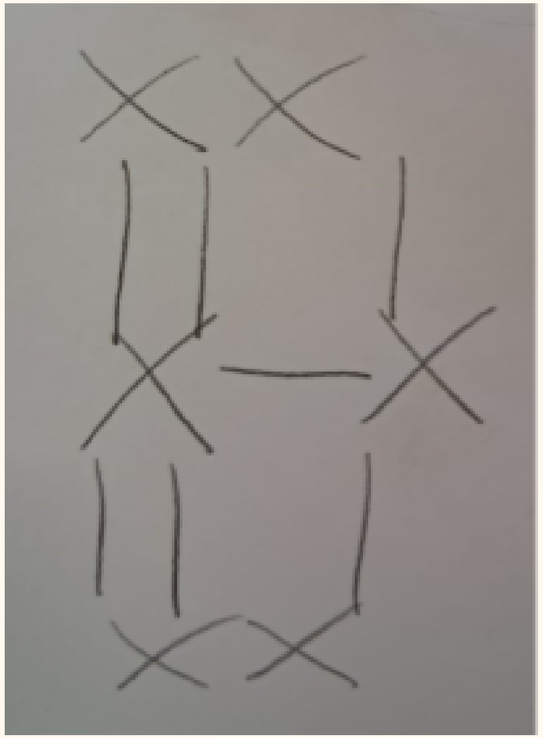
Lavorando individualmente gli alunni hanno provato a ridurre all'essenziale la mappa partendo con l'**eliminazione delle casette e degli altri oggetti di scena**, *ma non bastava*...

1 - Trasformare i ponti in linee

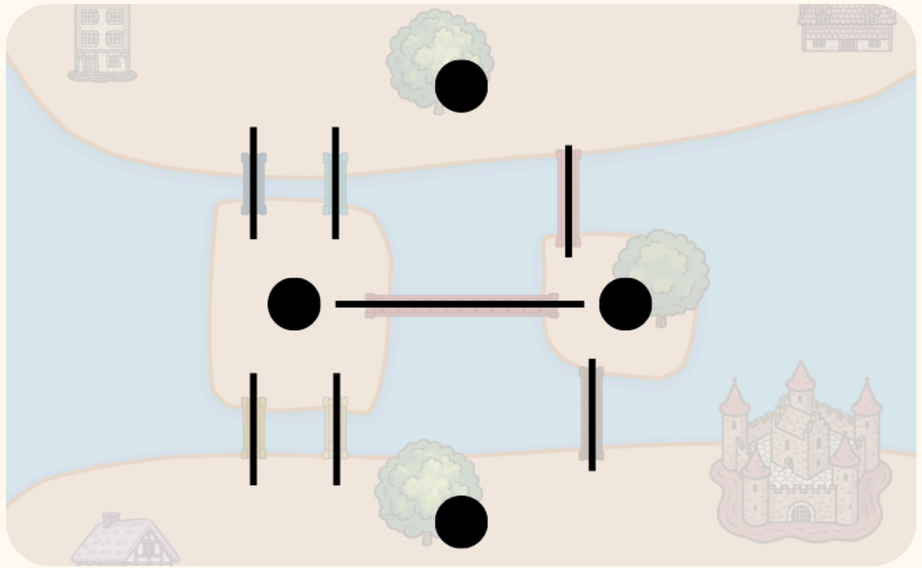


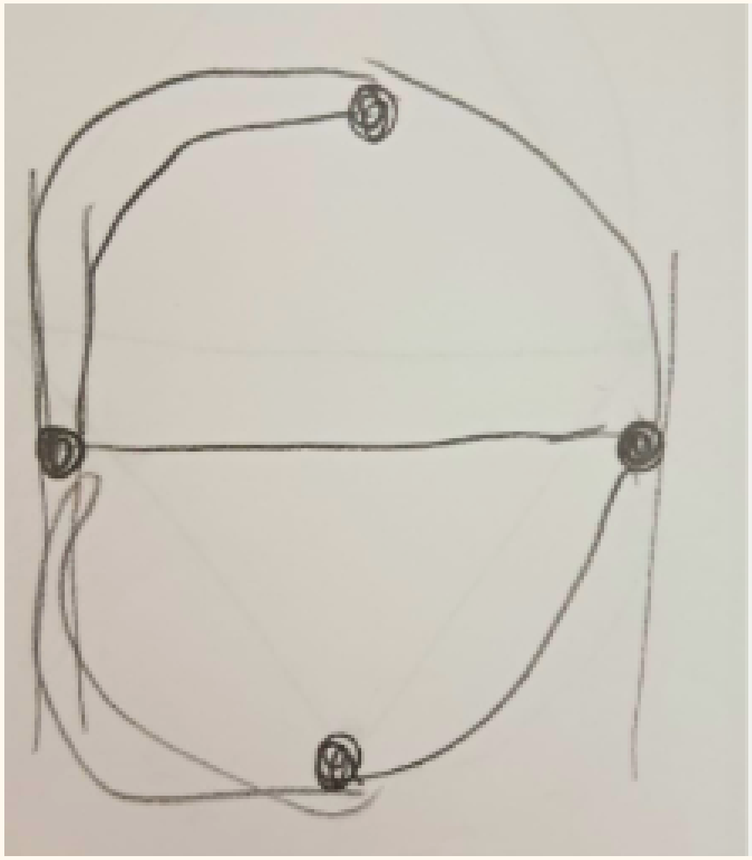
2 - Trasformare le isole in punti, lasciando la terra ferma!

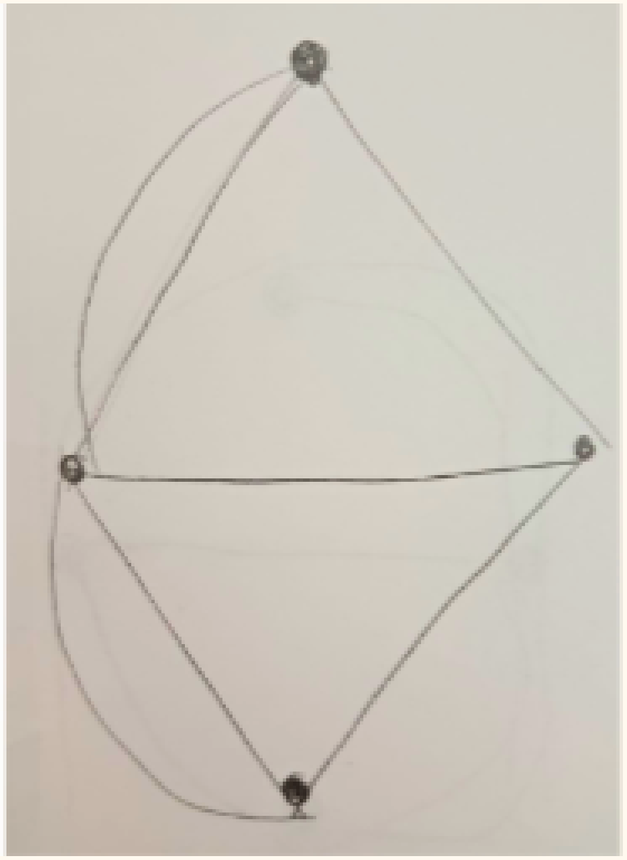


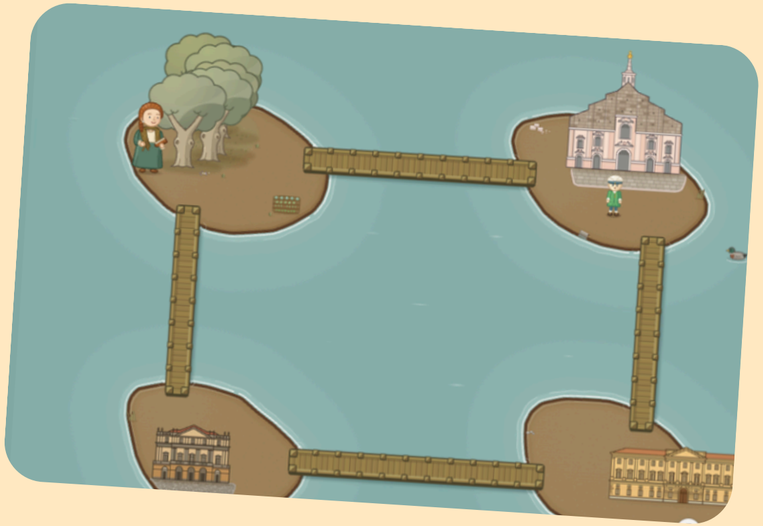


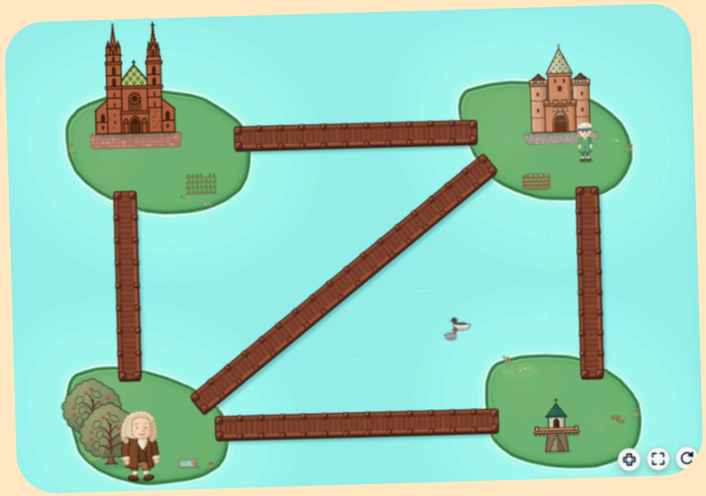
3 - Scoprire che tutto può essere rappresentato con un punto

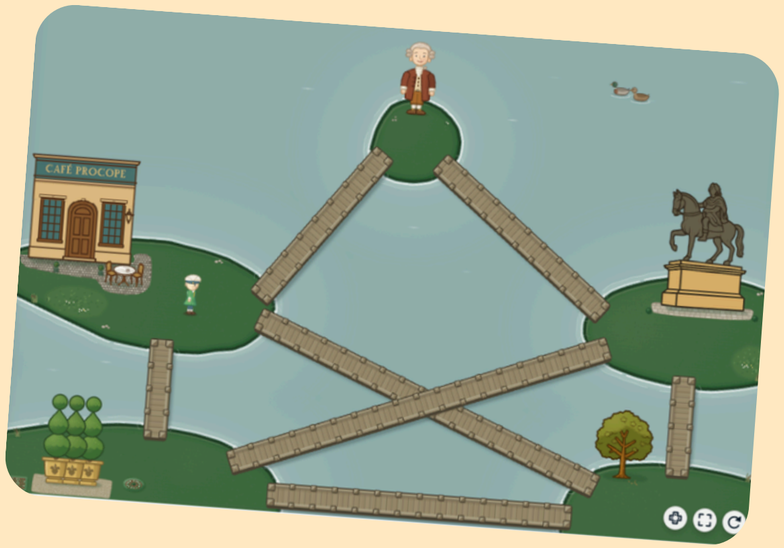


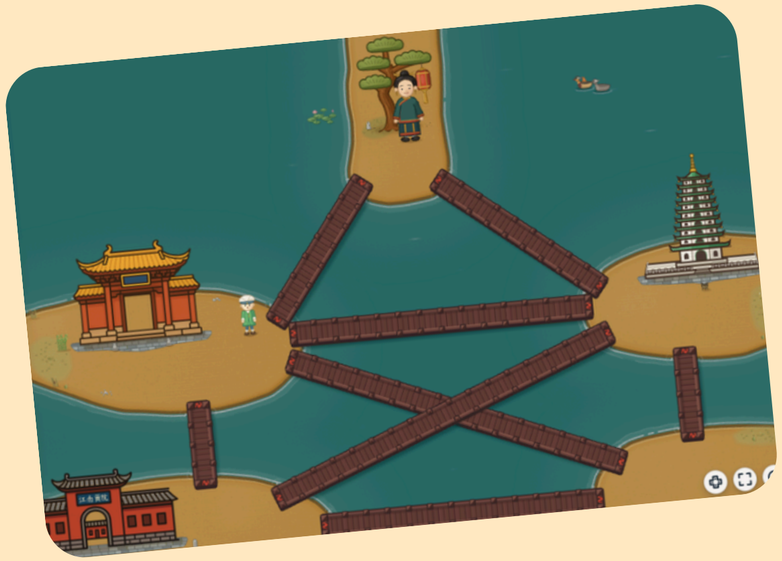


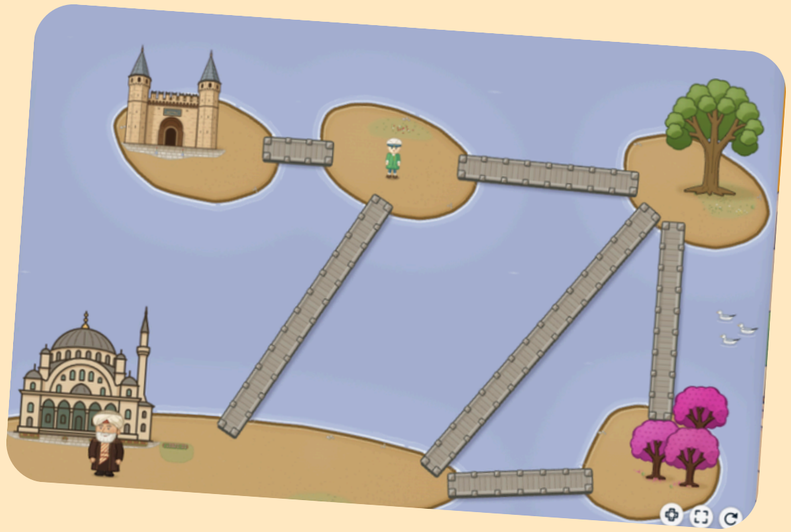






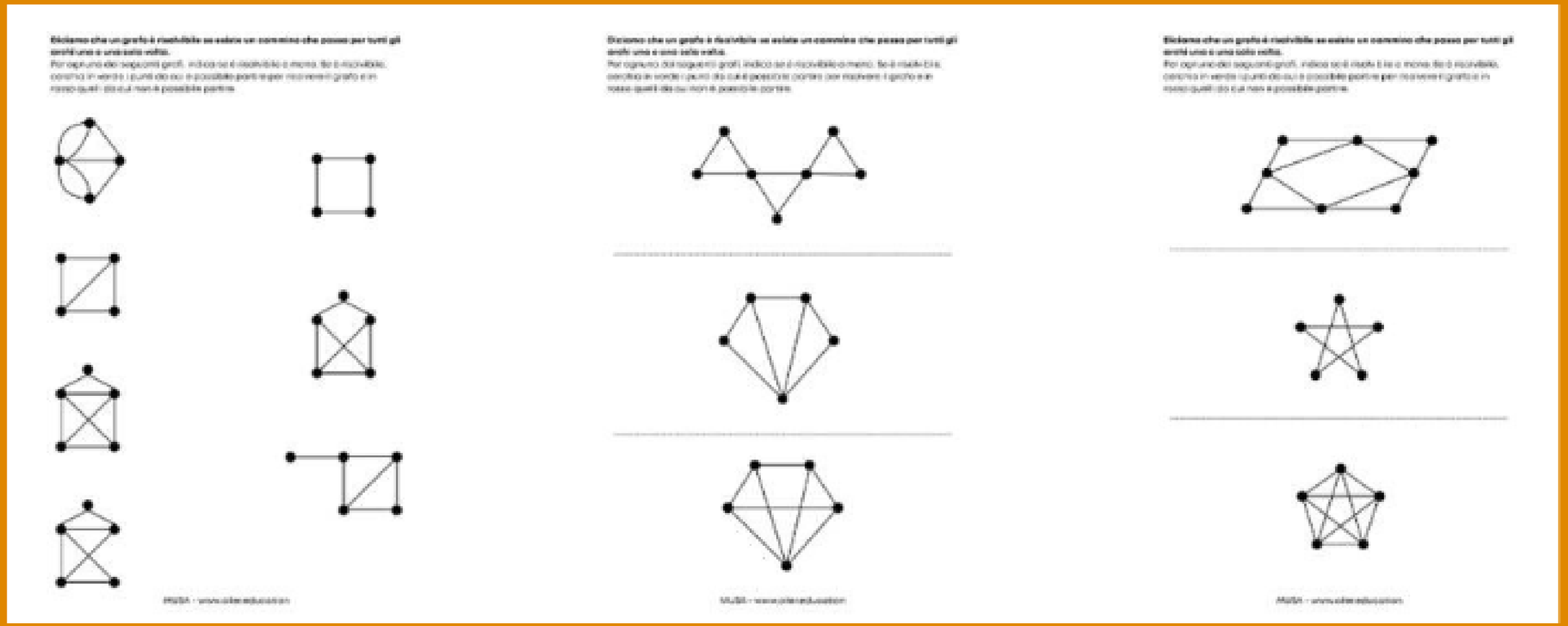

CAFÉ PROCOPE







Qual è la regola nascosta?



POSS

(O) TUTTE LE

FIGURE POSSIBILI

SE PARTI DA

UN PUNTO FINISCI

NELLO STESSO

SEMI POS

(M) TUTTE LE FIGU-

RE SEMI POSSIBILI

HANNO SOLO 2 ISOLE

DA DOVE SI PUO' PARTIRE

(N) SE PARTI DA UN

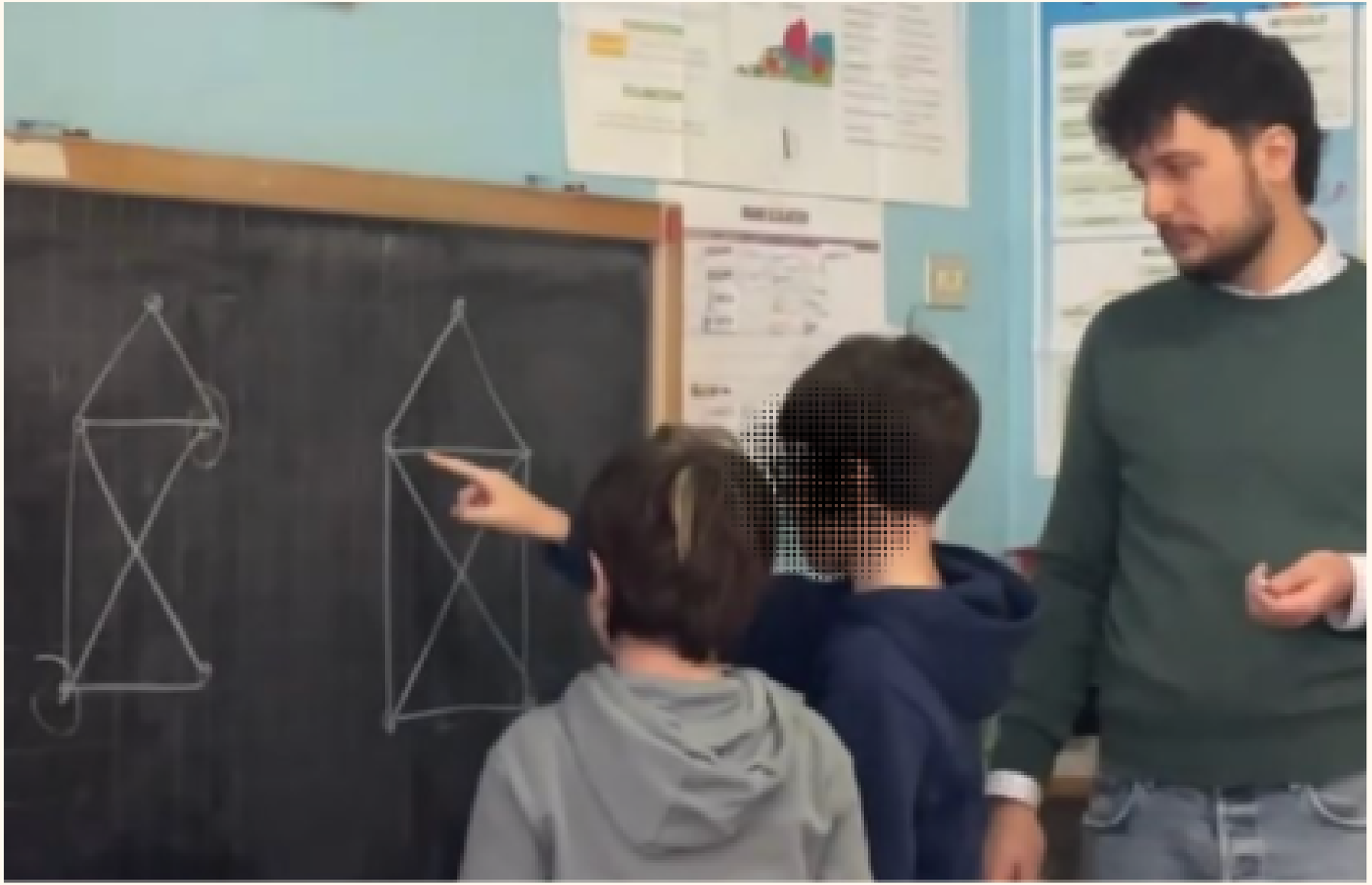
PUNTO POSSIBILE ARRIVE-

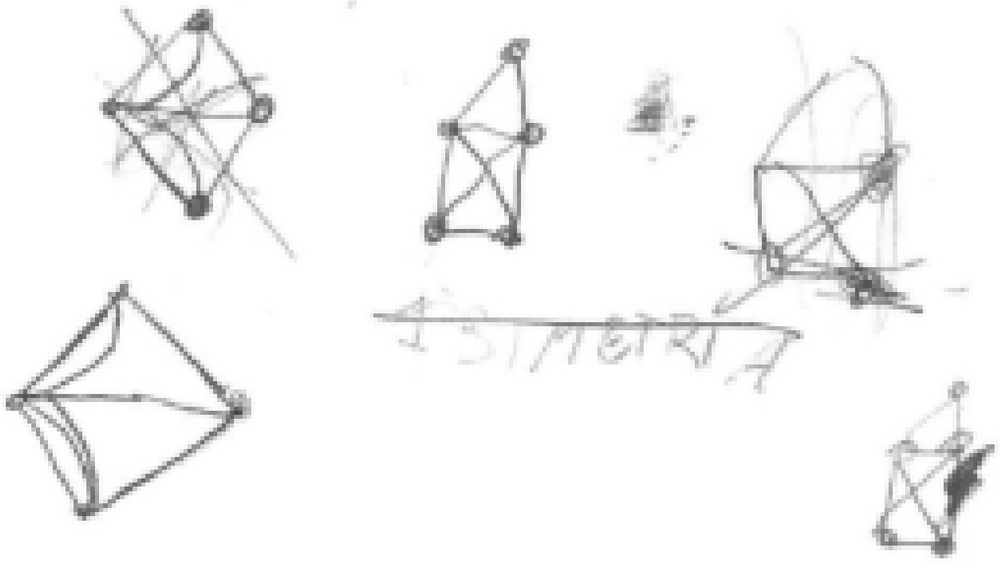
RÒ SU UN ALTRO PUNTO

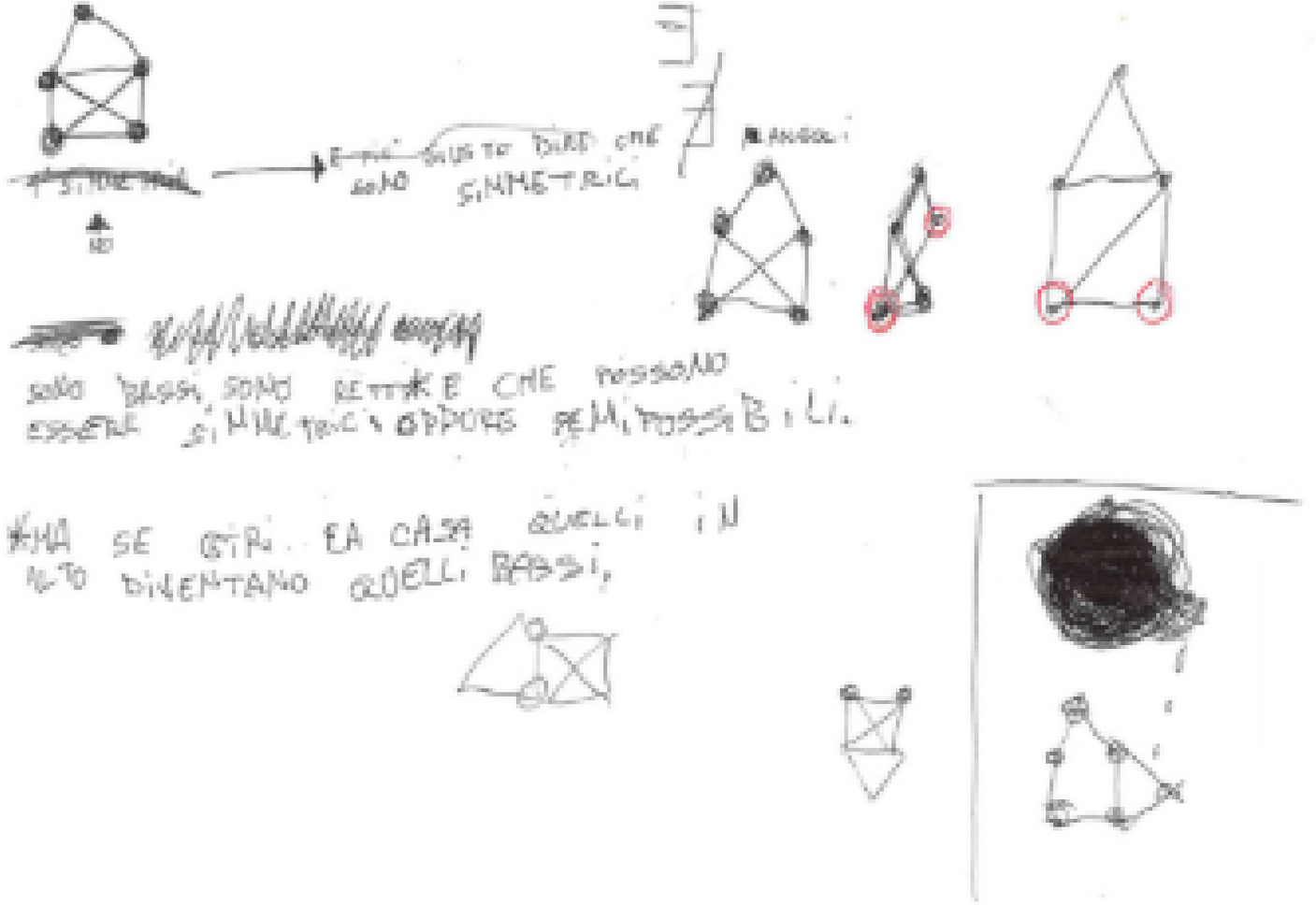
RISOLVIBILE

NPOS






ASIMETRIA



GRAZIE!

www.oiler.education

KONI GAME

GIOCO GRAFI EULERIANI



oiler.education